Série A, N° 3741 N° d'ordre 4592

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade

de DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

MAURICE TURPIN

PREMIÈRE THÈSE :

LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS EXTÉRIEURS ET LES ÉQUATIONS DE MONGE-APÈRE A N VARIABLES

DEUXIÈME THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 28-6-61 *devant la Commission d'examen :*

MM. GARNIER ..... *Président*
BOULIGAND ..... } *Examinateurs*
LICHNEROWICZ ..... }

Série A, N° 3741 N° d'ordre 4592

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade

de DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

MAURICE TURPIN

PREMIÈRE THÈSE :

LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS EXTÉRIEURS ET LES ÉQUATIONS DE MONGE-APÈRE A N VARIABLES

DEUXIÈME THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le *devant la Commission d'examen :*

MM. GARNIER ..... *Président*
BOULIGAND ..... } *Examinateurs*
LICHNEROWICZ ..... }

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

PROFESSEURS

Doyen. J. PERES

JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
BROGLIE	T	Théories physiques.
ENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
RES	T	Mécanique des fluides et applications.
JRCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
ANTEFOL	T	Botanique.
ASSE	T	Evolution des êtres organisés.
EVOST	T	Chimie organique.
JLIGAND	T	Analyse appliquée à la Géométrie.
AUDRON	T	Chimie appliquée.
ART	T	Minéralogie et Cristallographie.
SSIER	T	Zoologie.
NGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).
GER	T	Physique quantique et Relativité.
NNIER	T	Physiologie des Fonctions.
ETEAU	T	Paléontologie.
CARD	T	Physique (E.N.S.).
RTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
FFITTE	T	Chimie Générale.
VARD	T	Géométrie supérieure.
JLOMB	T	Physique du Globe.
COUSIN	T	Biologie.
RETIEN	T	Chimie minérale.
ACH	T	Zoologie.
STLER	T	Physique (E.N.S.).
HRUSSI	T	Génétique.
VIERE	T	Géologie (Orsay).
JTHERET	T	Biologie (P.C.B.).
CAS R.	T	Recherches physiques.
OMAS A.	T	Biologie cellulaire.
NULF	T	Optique appliquée.
RAND	T	Physique Enseignement
LEILLET	T	Physique (P.C.B.).
RTIER	T	Mécanique expérimentale des Fluides.
NJON	T	Astronomie.
TIT	T	Biologie maritime.
ENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
LIEN	T	Embryologie.
HHORN	T	Biologie Végétale (P.C.B.).
CUGNAC	T	Biologie Végétale (S.P.C.N.).
CAUCHOIS	T	Chimie Physique.
ELLIER	T	Physique du Globe.
ERITIER	T	Biologie générale (ORSAY).
VET	T	Radioélectricité (ORSAY).
NCIN	T	Mécanique Générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.
QUELET	T	Chimie Organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie Macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structure.
JACQUINOT	T	Spectroscopie (ORSAY).
VASSY	T	Physique de l'Atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théories Physiques.
PRUVOST	T	Géologie.
AMIEL	T	Chimie des Solides.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.
J.-P. MATHIEU	T	Recherches Physiques.
COUTEAUX	T	Biologie Animale (P.C.B.).
MAY	T	Zoologie (ORSAY).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie Végétale (P.C.B.).
GUINIER	T	Physique des Solides (ORSAY).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des Probabilités.
SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et Intégral.
CHOUARD	T	Physiologie Végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Technique Aéronaut.).
BRELOT	T	Calcul différentiel.
NORMANT	T	Synthèse organique générale.
BENARD	T	Chimie (E.N.S.C.P.).
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
DUGUE	T	Statistiques Mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie Végétale (E.N.S.).
MARECHAL	T	Optique théorique et Appliquée.
KIRRMANN	T	Théories Chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Mathématiques générales.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T	Calcul des Probabilités.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.

PROFESSEURS

ANSKY	T	Mathématiques générales.
NUIER	T	Physiques (P.C.B.).
T	T	Génétique (ORSAY).
THIER	T	Géologie appliquée.
TONNELAT	T	Relativité.
IIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
CHAY	T	Chimie (P.C.B.).
AIN	T	Electrotechnique générale.
SSET		Chimie minérale.
EVY	T	Physique théorique des Hautes Energies (ORSAY).
CHAIX	T	Chimie biologique.
HUREL-PY		Biologie Végétale (P.C.B.).
X	T	Chimie (S.P.C.N.).
N	T	Mécanique expérimentale des Fluides.
ERER	T	Chimie biologique.
DUBREIL	T	Mathématiques (Agregation).
LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
AIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
E	T	Physique (M.P.C.).
DIS J.-E.	T	Chimie (M.P.C.).
OTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
EL André	T	Chimie Minérale (ORSAY).
ER	T	Energétique générale.
AULT	T	Physique.
THIER	T	Mécanique appliquée.
HEWITZ	T	Chimie Physique.
SEL	T	Physique atomique.
R	T	Biologie animale (P.C.B.).
US	T	Biologie végétale (P.C.B.).
AING	T	Physique (ORSAY).
EN	T	Minéralogie et Cristallographie.
SE	T	Physiologie végétale (ORSAY).
ETIER	T	Chimie (ORSAY).
OMPES	T	Biologie Animale (P.C.B.).
MANN		Chimie théorique.
LAC	T	Physique Nucléaire et Radioactivité (ORSAY).
ELAT		Biologie physico-chimique.
E	T	Econométrie.
EMART	T	Chimie (P.C.B.).
	T	Chimie (ORSAY).
MANN	T	Physique (S.P.C.N.).
OCHET	T	Biologie Végétale (ORSAY).
ET	T	Chimie (P.C.B.).
JOSIEN	T	Chimie (P.C.B.).
ALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ULT	T	Electronique (ORSAY).
ELLE	T	Physique (ORSAY).
NGE	T	Mathématiques (ORSAY).
	T	Mathématiques Génér. (ORSAY).
IAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
S G.	T	Géologie.
RD	T	Chimie Physique.
HELOT	T	Physique Fondamentale des Hautes Energies (ORSAY).
ARD	T	Météorologie.
ALBE-SSARD	T	Psychophysiologie.
FRIEDEL	T	Physique des Solides (ORSAY).
M. JULIA		Chimie Organique Structurale.
LENDER		Biologie Animale (S.P.C.N.) (ORSAY).
MAGAT		Physico-chimie des rayonnements.
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie.
MONOD	T	Biochimie Cellulaire.
BENOIT	T	Physiologie Animale (ORSAY).
De POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
HAISSINSKY	T	Radiochimie.
LEMEE	T	Physiologie B.M.P.V. (ORSAY).
GUERIN	T	Chimie (ORSAY).
CHATELET M.		Chimie (P.C.B.).
JEAN		Physique (ORSAY).
MATTLER	T	Physique (ORSAY).
MICHEL Louis		Physique théorique (ORSAY).
RUMPF		Chimie (P.C.B.).
BERGERARD		Biologie Animale (S.P.C.N. (ORSAY).
BERTEIN		Electronique (ORSAY).
BOUISSIERES		Chimie des Radioéléments (ORSAY).
Mme COUTURE		Thermodynamique et Mécanique Physique.
ELLENBERGER		Géologie appliquée.
FRANC		Biologie Animale (P.C.B.).
SCHNELL		Botanique tropicale (ORSAY).
STOLKOWSKI		Biologie Animale (P.C.B.).
ACHER		Chimie Biologique (ORSAY).
BAUDOIN		Biologie.
BEAUMONT		Biologie animale.
BLAMONT		Géophysique Ionosphère.
BOURREAU		Biologie Végétale (S.P.C.N.) (ORSAY).
CURIE D.		Physique (M.G.P.).
DURAND - DELGA		Géologie.
FREON		Chimie Organique (ORSAY).
HELLER		Physiologie végétale.
TORTRAT		Calcul des Probabilités.
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.).
MAGNAN	T	Physique (P.C.B.).
DAUDEL		Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la Physique nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie Végétale (S.P.C.N.).
BARRAUD		Physiologie Cellulaire.
NOIROT		Evolution des êtres organisés.
Mme FOURES-BRUHAT	T	Mécanique Analytique et Mécanique céleste.
Mlle VEIL	T	Physiologie Générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie (ORSAY).
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (ORSAY).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques N.P.C. (ORSAY).
MAZET	T	Mécanique générale (ORSAY).

Secrétaire Général. POULLAIN R.

A. M. D. G.

A la mémoire de mon Père

A ma Mère

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550219_0002

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution à l'étude des systèmes différentiels extérieurs et à celle des équations de Monge-Ampère à n variables. La seconde partie n'est pas sans rapport avec la première : on sait, en effet, qu'une équation de Monge-Ampère est susceptible d'être remplacée par un système différentiel extérieur de deux équations . Système, d'ailleurs , très particulier, puisque la deuxième équation, celle de degré n, a pour premier membre une n-forme décomposée en les différentielles dx_i, dp_i.

L'essentiel sur les systèmes différentiels extérieurs se trouve dans le livre de M.E.Cartan : "Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques".

Dans le premier chapitre , nous établissons quelques propriétés nouvelles des caractères, dont la principale est celle-ci :

Pour un système de degré h , on a : $s_{k+1} \leqslant (h-1)s_k$, pourvu que : $k \geqslant h-1$.

D'où il suit que, si s_k est nul, il en est de même de s_{k+1} (moyennant la condition indiquée).

Nous donnons aussi une nouvelle méthode, simplifiée, pour calculer les caractères.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la notion de système presque fermé. Un système presque fermé, dans lequel on a choisi p variables indépendantes, est dit en involution si son genre et son degré sont au moins égaux à p. Nous énonçons et démontrons, pour la solution d'un tel système, un théorème local d'existence.

Dans le troisième chapitre, on introduit la notion de système complètement intégrable, généralisation, pour les systèmes de degré quelconque, de la définition classique, pour les systèmes de degré 1. On démontre, pour ces systèmes, un théorème local d'existence et d'unicité.

La deuxième partie est relative aux équations de Monge-Ampère à n variables. L'essentiel sur le sujet se trouve dans un mémoire de M. E. Goursat, publié en 1899 dans le Bulletin de la Société mathématique de Franee.

Dans le premier chapitre, nous démontrons la proposition suivante : le rang du système caractéristique par rapport aux dp_i est égal au degré de l'équation de Monge-Ampère par rapport aux dérivées partielles du

second ordre.

Dans le deuxième chapitre, on indique des formes canoniques nouvelles, dont la principale concerne les équations de Monge-Ampère à systèmes caractéristiques confondus.

Le troisième chapitre porte sur la méthode d'intrégration de Monge-Jacobi . Le principal résultat nouveau est relatif aux équations de Monge-Ampère à systèmes caractéristiques distincts, lorsqu'on connaît n+2 intégrales premières dont n-2 communes aux deux systèmes. Dans certains cas, la résolution générale de l'équation est alors ramenée à celle d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable

Le dernier chapitre est consacré à quelques applications, dans l'espace R^4. On étudie en particulier les équations pour lesquelles les caractéristiques des variétés intégrales sont, soit des lignes asymptotiques, soit des lignes de courbure.

Qu'il me soit permis de dire ici ma respectueuse gratitude à Monsieur R. Garnier, membre de l'Institut, et à Monsieur G. G Bouligand , dont les encouragements et la bienveillance m'incitèrent à entreprendre ce travail, et à le continuer.

Je remercie aussi respectueusement Monsieur A. Lichnerowicz qui a bien voulu me donner de précieux conseils, et accepter d'examiner ce modeste travail.

-=-=-=-=-=-=-=-

PREMIERE PARTIE

SYSTEMES DIFFERENTIELS EXTERIEURS

CHAPITRE PREMIER

SYSTEMES D'EQUATIONS EXTERIEURES

Dans ce chapitre, de nature purement algébrique, nous étudions les systèmes d'équations obtenus en égalant à zéro des formes extérieures de degrés quelconques à n variables.

Des invariants importants d'un tel système sont les caractères et le genre, introduits d'abord par M.E. Cartan pour un système différentiel extérieur[1].

Nous démontrons quelques propriétés nouvelles des caractères, dont l'une en particulier permet de simplifier notablement leur recherche effective.

PARAGRAPHE 1 - CARACTERES ET GENRE D'UN SYSTEME

1- FORME EXTERIEURE

a) Une forme extérieure, de degré p, (ou p-forme) sur C^n, à n variables complexes $x^1,\dots,x^n$, $(p < n)$ est une forme linéaire par rapport aux C_n^p produits extérieurs

$$x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{i_p},$$

$i_1,\dots,i_p$ étant une combinaison de p entiers distincts choisis parmi les n premiers, telle que $i_1 < \dots < i_p$.

Il est essentiel de remarquer qu'une telle forme n'a que C_n^p coefficients complexes indépendants.

Cependant il est commode de l'écrire comme il suit :

---

(1) cf. E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, page 66. Les références à un livre de M.E.Cartan sans indication du titre, devront s'entendre de cet ouvrage.

$$\frac{1}{p!} A_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_p} \qquad (1)$$

$(i_1, \ldots, i_p = 1, \ldots, n)$, en introduisant n^p coefficients $A_{i_1 \ldots i_p}$ antisymétriques.

Quand une forme extérieure (ou, plus loin, une forme différentielle extérieure) de degré supérieur à 1 sera écrite de cette façon, on supposera toujours , sauf indication contraire, que les coefficients sont antisymétriques.

Nous désignerons par degré d'un système d'équations extérieures le degré maximum des formes composant les premiers membres du système.

b) Soient ω et φ deux formes extérieures, de degrés respectifs h et k, aux variables $x^1, \ldots, x^n$. Leur produit extérieur $\omega \wedge \varphi$ s'effectue suivant les règles du calcul d extérieur. C'est une forme de degré h+k , nulle identiquement si $h+k > n$. Ceci se généralise aisément au cas d'un produit extérieur d'un nombre quelconque de formes.

c) Faire, dans une forme ω , aux variables $x^1, \ldots, x^n$, la substitution linéaire : $x^i = a^i_j X^j$, $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m$; m peut être différent de n), c'est remplacer les x^i par les formes en X^j précédentes, et effectuer ensuite, dans chaque monôme de ω , le produit extérieur suivant les règles connues, enfin regrouper les termes semblables, dans la nouvelle forme obtenue.

2 - PROPRIETES INTRINSEQUES

Il est commode, pour énoncer brièvement les propriétés intrinsèques de la multiplication extérieure, d'introduire un espace vectoriel à n dimensions sur les nombres complexes, K^n, et de considérer $x^1, \ldots, x^n$ comme les coordonnées d'un élément $\vec{x}$ de cet espace , dans une base donnée.

Nous appellerons : vecteurs, les éléments de K^n, et p-vecteurs ceux de $\overset{p}{\wedge} K^n$ (tenseurs antisymétriques contravariants d'ordre p) , réservant le nom de p-vecteurs simples, ou décomposables, aux produits extérieurs de p vecteurs.

Soit $(K^n)^*$ le dual de K^n.

---

(1) Nous adoptons la convention d'Einstein sur les indices muets.

Une p-forme , sur K^n, peut être identifiée avec un élément de $\overset{p}{\wedge}(K^n)^*$, car on sait que ses composantes se transforment, dans un changement de base de K^n, comme celles d'un tenseur antisymétrique covariant d'ordre p.

Cela étant, le théorème essentiel, à ce sujet, peut s'énoncer comme il suit :

Soit K^m un espace vectoriel sur les nombres complexes, et μ une application linéaire de K^n dans K^m. Considérons deux formes extérieures α et β , définies sur K^m, et soient $\mu^*\alpha$ et $\mu^*\beta$ leurs images réciproques dans K^n. On démontre l'égalité :

$$\mu^*(\alpha \wedge \beta) = (\mu^*\alpha) \wedge (\mu^*\beta) .$$

Remarques : 1) Prenons pour K^m l'espace K^n, et pour μ un automorphisme de K^n. Le théorème exprime alors que la multiplication extérieure est une opération intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la base considérée.

2) Si K^n est un espace plongé dans K^m, la forme $\mu^*\alpha$ est dite forme induite par α sur K^n.

3 - VALEUR D'UNE p-FORME POUR UN p-VECTEUR

Soit ω_p une p-forme ,dont l'expression, dans une base donnée de K^n, est :

$$\omega_p = \frac{1}{p!} A_{i_1 \ldots i_p} \; x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_p} .$$

Considérons p vecteurs $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_p}$, et désignons par a_k^i les composantes de $\vec{a_k}$.

Les $A_{i_1 \ldots i_p}$ sont les composantes d'un tenseur antisymétrique covariant.

Donc l'expression

$$A_{i_1 \ldots i_p} \; a_1^{i_1} \ldots a_p^{i_p}$$

est un scalaire , indépendant de la base choisie dans K^n. C'est la valeur de ω_p pour le p-vecteur simple $\vec{a_1} \wedge \ldots \wedge \vec{a_p}$.

Nous la représenterons par : $\omega_p(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_p})$

Remarque : On définit de même, plus généralement, la valeur d'une p-forme pour un tenseur antisymétrique p fois contravariant quelconque.

3bis- VALEUR TENSORIELLE D'UNE q-forme POUR UN p-VECTEUR

Soit ω une q-forme définie sur K^n, et t un p-vecteur .

a) Si p est inférieur à q, la valeur de ω pour t est, par définition, le scalaire zéro.

b) si $p \geqslant q$, nous appellerons valeur tensorielle de ω pour t, et nous noterons $\omega(t)$, le tenseur antisymétrique d'ordre $p-q = h$ défini de la façon suivante :

Soit, dans une base de K^n :

$$\omega = \frac{1}{q!} A_{i_1 \ldots i_q} \; x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_q}$$

l'expression de ω , et $t^{i_1 \ldots i_p}$ les composantes contravariantes de t.

$u = \omega(t)$ sera le tenseur de composantes contravariantes :

$$u^{i_1 \ldots i_h} = A_{j_1 \ldots j_q} \; t^{j_1 \ldots j_q \, i_1 \ldots i_h} .$$

(si $h = 0$,ce tenseur est un scalaire).

4 - CAS D'UN PRODUIT EXTERIEUR DE FORMES

Soient deux formes extérieures :

α de degré p ; β de degré q , et : $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{p+q}$ p+q vecteurs.

La valeur , pour le (p+q)-vecteur $\vec{u}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{u}_{p+q}$ de la forme :

$\omega = \alpha \wedge \beta$, est donnée par la formule :

$$\omega(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{p+q}) = \sum_{(C^p_{p+q})} (-1)^{I(i_1, \ldots, i_{p+q})} \alpha(\vec{u}_{i_1}, \ldots, \vec{u}_{i_p}) . \beta(\vec{u}_{i_{p+1}}, \ldots, \vec{u}_{i_{p+q}})$$

somme étendue aux C^p_{p+q} combinaisons $i_1, \ldots, i_p$ des p+q premiers entiers

p à p , la suite $i_{p+1},\dots, i_{p+q}$ étant complémentaire de $i_1,\dots,i_p$ dans l'ensemble des $p+q$ premiers entiers et $I(i_1,\dots,i_{p+q})$ étant le nombre d'inversions de la permutation

$$i_1,\dots,i_{p+q}.$$

En particulier, pour $p = q = 1$, on a la formule :

$$(\alpha \wedge \beta)(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha(\vec{u}).\ \beta(\vec{v}) - \alpha(\vec{v}).\ \beta(\vec{u}).$$

5 - VARIETE POLAIRE D'UN SYSTEME DE VECTEURS RELATIVEMENT A UN SYSTEME D'EQUATIONS EXTERIEURES

Soit un système S d'équations extérieures , de degré h quelconque, défini sur K^n :

$$(S)\quad \begin{cases} \omega_1^{\alpha_0} = 0 & (\alpha_0 = 1,\dots, r_0) \\ \vdots & \\ \omega_h^{\alpha_{h-1}} = 0 & (\alpha_{h-1} = 1,\dots, r_{h-1}) \end{cases}$$

(où l'indice inférieur d'un ω indique son degré).
A tout système de k vecteurs $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k$ nous associons le système suivant (système I_k)

$$(I_k)\quad \omega_1^{\alpha_0}(\vec{x}) = 0\ ,\quad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{x}) = 0,\dots,\quad \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1},\dots,\vec{u}_{\lambda_{h-1}},\vec{x}) = 0$$

$(\lambda_1,\dots, \lambda_{h-1} = 1,\dots,k)$.

nommé système polaire de $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k$ relativement à S. (chacun des indices $\lambda_1,\dots, \lambda_{h-1}$ parcourant la suite $1,\dots,k$ il est clair que le nombre d'équations de I_k dépend de k; Il y a d'ailleurs des réductions évidentes. Par exemple : le système polaire de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ est :

$$\omega_1^{\alpha_0}(\vec{x}) = 0 \qquad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_1, \vec{x}) = 0 \qquad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_2, \vec{x}) = 0 \qquad \omega_3^{\alpha_2}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{x}) = 0$$

il est inutile d'ajouter les autres équations, qui sont, soit identiquement

vérifiées, soit conséquences immédiates de celles-ci, en vertu de l'antisymétrie des ω_j).

Le lieu de $\vec{x}$ défini par I_k, pour $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k$ donnés, est la variété polaire de $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k$, que nous désignerons par : $P_{\vec{u}_1,\ldots\vec{u}_k}$.

6 - VARIETE POLAIRE DE DEUX SYSTEMES DE VECTEURS EQUIVALENTS

A) Définissons, sur l'ensemble des systèmes de p vecteurs de K^n, une relation d'équivalence : Deux tels systèmes sont équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par une substitution linéaire régulière. $(\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_p)$ sera équivalent à $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$ si l'on a :

$$\vec{f}_i = a_i^j \vec{e}_j \qquad \text{avec dét } (a_i^j) \neq 0.$$

Cette relation, est bien réflexive, symétrique, transitive.

B) Deux systèmes équivalents ont la même variété polaire. Démontrons le, en supposant S de degré 3. Soit le système :

$$(S) \qquad \begin{aligned} \omega^{\alpha_0} &= 0 & (\alpha_0 &= 1,\ldots,r_0) \\ \varphi^{\alpha_1} &= 0 & (\alpha_1 &= 1,\ldots,r_1) \\ \psi^{\alpha_2} &= 0 & (\alpha_2 &= 1,\ldots,r_2), \end{aligned}$$

les ω, φ, ψ, étant respectivement de degré 1,2,3. Soit $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p)$ un système de p vecteurs quelconques, et $(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_p)$ un système équivalent tel donc que l'on ait :

$$\vec{b}_j = \mu_j^k \vec{a}_k \qquad (j,k = 1,\ldots,p)$$

la matrice $M = (\mu_j^k)$ étant régulière.

Posons : $\varphi^{\alpha_1}(\vec{a}_{\lambda_1}, \vec{x}) = (\varphi^{\alpha_1})_{\lambda_1}$

$$\psi^{\alpha_2}(\vec{a}_{\lambda_1}, \vec{a}_{\lambda_2}, \vec{x}) = (\psi^{\alpha_2})_{\lambda_1,\lambda_2}$$

On a :

$$\varphi^{\alpha_1}(\vec{b}_{\lambda_1}, \vec{x}) = \varphi^{\lambda_1}(\mu^k_{\lambda_1} \vec{a}_k, \vec{x}) = \mu^k_{\lambda_1} (\varphi^{\alpha_1})_k$$

$$\varphi^{\alpha_2}(\vec{b}_{\lambda_1}, \vec{b}_{\lambda_2}, \vec{x}) = \varphi^{\alpha_2}(\mu^j_{\lambda_1} \vec{a}_j, \mu^k_{\lambda_2} \vec{a}_k, \vec{x}) = \mu^j_{\lambda_1} \mu^k_{\lambda_2} (\varphi^{\alpha_2})_{jk}.$$

La matrice M étant régulière , le système des équations :

$$\varphi^{\alpha_1}(\vec{b}_{\lambda_1}, \vec{x}) = 0,$$

où α_1 est donné, et où λ_1 décrit la suite $1,\ldots,p$, est équivalent au système des équations :

$$\varphi^{\alpha_1}(\vec{a}_{\lambda_1}, \vec{x}) = 0.$$

D'autre part, on passe du système des équations

$$\varphi^{\alpha_2}(\vec{a}_{\lambda_1}, \vec{a}_{\lambda_2}, \vec{x}) = 0,$$

où α_2 est donné, et où λ_1, λ_2 décrivent la suite $1,\ldots,p$, au système des équations

$$\varphi^{\alpha_2}(\vec{b}_{\lambda_1}, \vec{b}_{\lambda_2}, \vec{x}) = 0.$$

par une substitution linéaire dont la matrice admet pour éléments les déterminants du second ordre extraits de M. On sait que cette matrice est régulière, comme $M^{(1)}$. Donc les deux systèmes sont algébriquement équivalents, et la proposition en vue est démontrée.

7 - DEFINITION DES CARACTERES d et s.

Reprenons le système S du n° 5

A) Caractères $d_o, d_1, d_2, \ldots$

Pour tout entier positif k, nous noterons II_k le système suivant, aux vecteurs indéterminés $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$:

---

(1) Cf. T. Kowalewski, Determinantentheorie, p.95.

$$(II_k) \qquad \omega_1^{\alpha_0}(\vec{u}_{\lambda_1}) = 0 \ , \quad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) = 0, \ldots, \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{u}_{\lambda_h}) = 0$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_h = 1, \ldots, k)$.

Cela étant, les caractères d se définissent de proche en proche de la manière suivante :

1°) d_o est la dimension de la variété définie par :

$$\omega_1^{\alpha_0}(\vec{x}) = 0$$

2°) si $d_o = 0$, $d_1 = d_o$

si $d_o > 0$, d_1 est la dimension de la variété polaire de $\vec{u}_1$ lorsque ce vecteur est lié seulement par II_1.

3°) Si $d_1 \leqslant 1$, $d_2 = d_1$

si $d_1 > 1$, d_2 est la dimension de la variété polaire de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lorsque ces vecteurs sont liés seulement par II_2.

etc...

4°) Si $d_{k-1} \leqslant k-1$, $d_k = d_{k-1}$

si $d_{k-1} > k-1$, d_k est la dimension de la variété polaire de $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ liés seulement par II_k.

Remarques : 1) La condition : $d_{k-1} > k-1$ garantit l'existence de k vecteurs indépendants vérifiant le système II_k. Cette existence n'est plus assurée dans l'hypothèse $d_{k-1} \leqslant k-1$.

2) Il découle de la définition précédente que, si l'on a $d_k \leqslant k$, d_{k+1} et tous les caractères suivants sont égaux à d_k.

3) Pour un système linéaire, tous les caractères d_i sont égaux à d_o.

B) Caractères $s_o, s_1, s_2, \ldots$ (1)

Ces caractères sont définis par :

$$s_o + \ldots + s_j = n - d_j$$

ou

$$s_{j+1} = d_j - d_{j+1} ,$$

pour tout indice j, positif ou nul (avec : $s_o = n - d_o$) . Il résulte de cette définition même que les caractères sont invariants dans tout changement de base de K^n.

7 bis - PROPRIETES DES CARACTERES

A) Caractères d_i

1) On vérifie immédiatement que les d_i sont des entiers positifs ou nuls, formant une suite non croissante :

$$n \geqslant d_o \geqslant d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_k \geqslant \ldots \geqslant 0$$

Il n'y a donc qu'un nombre fini de d_i distincts .

2) Si $d_k > k$, on a : $d_{k+1} \geqslant k+1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

En effet, par hypothèse la variété polaire de $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$, liés seulement par II_k, est de dimension supérieure à k. Donc il existe k+1 vecteurs indépendants satisfaisant à II_{k+1}. Par conséquent , la variété polaire de $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k+1}$, liés seulement par II_{k+1} , est de dimension supérieure ou égale à k+1.

Corollaire - si $d_k < k$, d_k et tous les suivants sont égaux à d_{k-1}.
En effet, l'hypothèse entraine : $d_{k-1} \leqslant k-1$, car si on avait $d_{k-1} > k-1$ on en déduirait $d_k \geqslant k$.

De l'inégalité : $d_{k-1} \leqslant k-1$ il suit immédiatement :

$$d_{k-1} = d_k = d_{k+1} = \ldots$$

(1) Ce sont les caractères introduits par E. Cartan . Mais lorsqu'on cherche à les définir de façon intrinsèque, on est amené à considérer des variétés linéaires de K^n. Il est plus naturel de parler de la dimension d'une variété que du rang du système linéaire qui la définit, dans une base donnée. D'où l'introduction des d_i.

3) Si le système S n'est pas identiquement vérifié, on a : $d_{n-1} \leqslant n-1$.

En effet, soit c le plus petit degré des équations de S. Si $c=1$, on a évidemment : $d_o \leqslant n-1$, donc, en vertu de la non-croissance des d_i : $d_{n-1} \leqslant n-1$.

Si $c > 1$, démontrons l' inégalité : $d_{c-1} \leqslant n-1$. Remarquons pour cela, que, dans la définition de d_k, interviennent seulement les équations de degré $\leqslant k+1$.

Par conséquant : $d_o = d_1 = \dots = d_{c-2} = n$

d_{c-1} est la dimension de la variété polaire de $\vec{u_1},\dots,\vec{u_{c-1}}$, indépendants. Cette variété ne se confond pas avec l'espace K^n tout entier, puisqu'il y a , dans S, au moins une équation de degré c, Donc $d_{c-1} \leqslant n-1$.

Comme la suite des d_i est non-croissante, on a bien :

$$d_{n-1} \leqslant n-1 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

B) <u>Caractères</u> s_i

Ces propriétés des d_i entrainent les propriétés corrélatives suivantes des s_i :

Ces caractères sont des entiers positifs ou nuls, vérifiant, quel que soit $j \geqslant 0$:

$$s_o + \dots + s_j \leqslant n.$$

De plus : si $s_o < n$, on a : $s_o + s_1 \leqslant n-1$

si $s_o + s_1 < n-1$, on a : $s_o + s_1 + s_2 \leqslant n-2$

etc...

Enfin, on a , pour tout système (S) non identiquement vérifié :

$$s_o + \dots + s_{n-1} \geqslant 1.$$

Remarque : Si le degré du système est au plus égal à 2, les caractères $s_1, s_2, s_3, \dots$, forment une suite non croissante(1) . Si donc l'un est nul tous les suivants le sont.

---

(1) Cf. E. Cartan, Systèmes différentiels extérieurs , p;78. Il ya lieu d'apporter une légère restriction à l'énoncé auquel nous renvoyons, car ce n'est qu'à partir de s_1 que les s_i forment une suite non-croissante.

8 - GENRE D'UN SYSTEME

Il existe un entier, positif ou nul , g, et un seul , tel que $d_g = g$.

C'est par définition, le genre du système.

L'unicité de g est une conséquence immédiate de la non-croissance des d_i,

Pour démontrer l'existence de cet entier, observons que l'on a : $d_{n-1} \leqslant n-1$, ce qui entraine: $d_i < i$ pour $i > n-1$.

L'ensemble des entiers k pour lesquels $d_k \geqslant k$ est donc borné supérieurement : soit g sa borne supérieure.

Démontrons qu'on a : $d_g = g$.

En effet, de l'hypothèse $d_g > g$ on déduirait : $d_{g+1} \geqslant g+1$, et g ne serait pas la borne supérieure annoncée.

8bis - PROPRIETE CARACTERISTIQUE DU GENRE

Soit un système de genre g.

a) Pour $i \geqslant g$, on a : $d_i = g$.

C'est une conséquence immédiate de : $d_g = g$. Supposons, réciproquement, que, pour $i > a$, où a est un entier positif ou nul, on ait : $d_i = d_a$, Montrons que le genre est égal à d_a.

D'abord, puisque le genre est la valeur de l'un des d_i, et que la suite des d_i est non-croissante, on a : $g \geqslant d_a$. D'autre part , si on avait $g > d_a$, on aurait, pour $i \geqslant g$: $d_i > d_a$, ce qui contredit l'hypothèse,on a donc bien : $g = d_a$.

On peut énoncer :

Pour qu'un entier g soit égal au genre, il faut et il suffit que l'on ait : $d_i = g$ pour une infinité de valeurs de i.

b) Pour $i > g$, on a : $s_i = 0$. C'est une conséquence immédiate de ce qui précède, compte tenu de $s_i = d_{i-1} - d_i$.

On voit que le caractère s_g est le dernier qui puisse être différent de zéro.

9 - SYSTEMES ALGEBRIQUEMENT EQUIVALENTS

Par définition, le système (T) le plus général algébriquement équivalent au système (S) du n°5 est le suivant :

$$(T)\quad \begin{cases} \Omega_1^{\alpha_o} \equiv B^{\alpha_o}_{\alpha'_o}\ \omega_1^{\alpha'_o} = 0 & (\alpha'_o = 1,\dots, r_o) \\ \Omega_2^{\alpha_1} \equiv B^{\alpha_1}_{\alpha'_1}\ \omega_2^{\alpha'_1} + \Phi_2^{\alpha_1} = 0 & (\alpha'_1 = 1,\dots,r_1) \\ \vdots \\ \Omega_h^{\alpha_{h-1}} \equiv B^{\alpha_{h-1}}_{\alpha'_{h-1}}\ \omega_h^{\alpha'_{h-1}} + \Phi_h^{\alpha_{h-1}} = 0 & (\alpha'_{h-1} = 1,\dots,r_{h-1}) \end{cases}$$

les $B^{\alpha_j}_{\alpha'_j}$ $(j = 0,\dots,h-1)$ étant des constantes telles que, pour j donné, le déterminant, d'ordre r_j, des $B^{\alpha_j}_{\alpha'_j}$ soit différent de zéro , et $\Phi^{\alpha_j}_{j+1}$ appartenant à l'anneau gradué, de degré j+1, engendré par les formes $\omega_1^{\alpha_o}$, $\omega_2^{\alpha_1}$,..., $\omega_j^{\alpha_{j-1}}$.

La relation d'équivalence,ainsi définie dans l'ensemble des systèmes de degré h, est bien réflexive, symétrique, transitive.

10 - CARACTERES DE DEUX SYSTEMES ALGEBRIQUEMENT EQUIVALENTS

Deux systèmes algébriquement équivalents ont les mêmes caractères Pour simplifier l'écriture, bornons-nous à un système de degré 3 :

$$(S)\quad \begin{cases} \omega^{\alpha_o} = 0 & (\alpha_o, \alpha'_o = 1,\dots, r_o) \\ \varphi^{\alpha_1} = 0 & (\alpha_1, \alpha'_1 = 1,\dots,r_1) \\ \psi^{\alpha_2} = 0 & (\alpha_2, \alpha'_2 = 1,\dots,r_2) \end{cases}$$

les ω, φ, ψ étant respectivement de degré 1,2,3. Les systèmes I_k et II_k associés à S sont :

$$(I_k)\qquad \omega^{\alpha_o}(\vec{x}) = 0 \qquad \varphi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{x}) = 0 \qquad \psi^{\alpha_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}, \vec{x}) = 0$$

$(\lambda_1, \lambda_2 = 1,\dots k)$.

$$(II_k) \qquad \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}) = 0 , \qquad \varphi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) = 0 , \qquad \psi^{\alpha_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}, \vec{u}_{\lambda_3}) = 0$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1,\dots,k)$.

Soit T un système algébriquement équivalent à S :

$$(T) \qquad \begin{cases} \Omega^{\alpha_o} \equiv B^{\alpha_o}_{\alpha'_o} \, \omega^{\alpha'_o} = 0 \\ \Phi^{\alpha_1} \equiv C^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \, \varphi^{\alpha'_1} + D^{\alpha_1}_{\alpha_o} \wedge \omega^{\alpha_o} = 0 \\ \Psi^{\alpha_2} \equiv E^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \, \psi^{\alpha'_2} + F^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \wedge \varphi^{\alpha_1} + G^{\alpha_2}_{\alpha_o} \wedge \omega^{\alpha_o} = 0 \end{cases}$$

auquel on associe les systèmes I'_k et II'_k

$$(I'_k) \qquad \Omega^{\alpha_o}(\vec{x}) = 0 \qquad \Phi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{x}) = 0 \qquad \Psi^{\alpha_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}, \vec{x}) = 0$$

$(\lambda_1, \lambda_2, = 1,\dots,k)$

$$(II'_k) \qquad \Omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}) = 0 \qquad \Phi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) = 0 \qquad \Psi^{\alpha_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}, \vec{u}_{\lambda_3}) = 0$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1,\dots,k)$.

Il est facile de réduire II'_k. On a en effet (n° 3 et 4)

$$\Omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}) = B^{\alpha_o}_{\alpha'_o} \, \omega^{\alpha'_o}(\vec{u}_{\lambda_1})$$

$$\Phi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) \equiv C^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \, \varphi^{\alpha'_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) + D^{\alpha_1}_{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}) . \, \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_2})$$
$$- D^{\alpha_1}_{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_2}) . \, \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1})$$

$$\Psi^{\alpha_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}, \vec{u}_{\lambda_3}) \equiv E^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \, \psi^{\alpha'_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}, \vec{u}_{\lambda_3}) + F^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}) . \, \varphi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_2}, \vec{u}_{\lambda_3})$$
$$+ F^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_2}) . \, \varphi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_3}, \vec{u}_{\lambda_1}) + F^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_3}) . \, \varphi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2})$$
$$+ G^{\alpha_2}_{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1} \, \vec{u}_{\lambda_2}) \, \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_3}) + G^{\alpha_2}_{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_2} \, \vec{u}_{\lambda_3}) . \, \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1})$$
$$+ G^{\alpha_2}_{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_3}, \vec{u}_{\lambda_1}) . \, \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_2}).$$

Imaginons que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ parcourent la suite des k premiers entiers ; le système obtenu en égalant les seconds membres à zéro est visiblement équivalent à II_k.

Passons au système I'_k, qui s'écrit :

$$\Omega^{\alpha_o}(\vec{x}) \equiv B^{\alpha_o}_{\alpha'_o} \; \omega^{\alpha'_o}(\vec{x}) = 0$$

$$\Phi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{x}) \equiv C^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \; \varphi^{\alpha'_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{x}) + D^{\alpha_1}_{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}) \cdot \omega^{\alpha_o}(\vec{x}) - D^{\alpha_1}_{\alpha_o}(\vec{x}) \cdot \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}) = 0.$$

$$\begin{aligned}\psi^{\alpha_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}, \vec{x}) \equiv\; & E^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \; \psi^{\alpha'_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}, \vec{x}) + F^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}) \cdot \varphi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_2}, \vec{x}) \\ & + F^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_2}) \cdot \varphi^{\alpha_1}(\vec{x}, \vec{u}_{\lambda_1}) + F^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\vec{x}) \cdot \varphi^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) \\ & + G^{\alpha_2}_{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) \cdot \omega^{\alpha_o}(\vec{x}) + G^{\alpha_2}_{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_2}, \vec{x}) \cdot \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}) \\ & + G^{\alpha_2}_{\alpha_o}(\vec{x}, \vec{u}_{\lambda_1}) \cdot \omega^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_2}) = 0.\end{aligned}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, = 1, \ldots, k)$.

Compte tenu de II'_k, il est clair que I'_k est équivalent à I_k.

Les systèmes (S) et (T) ont donc bien les mêmes caractères. (C.Q.F.D.)

Nous allons donner au n° 10ter, une limitation de s_{k+1} en fonction de s_k.

A cet effet, nous utiliserons le lemme suivant.

10 bis - LEMME

Soit E un ensemble composé de k éléments, F^j l'ensemble des combinaisons j à j des éléments de E $(1 \leq j < k)$. La notation e_i désignant un sous-ensemble de E à k-1 éléments, et f^j_i l'ensemble des combinaisons j à j des éléments de e_i, on peut, à tout entier p donné $(1 \leq p < k)$, faire correspondre p+1 sous-ensembles $e_1, \ldots, e_{p+1}$ tels que :

$$e_1 \cup \ldots \cup e_{p+1} = E$$
$$f_1^j \cup \ldots \cup f_{p+1}^j = F^j \; ;$$

quel que soit j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant p$.

En effet, posons :

$$E = \{a_1, \ldots, a_k\} \quad .$$

Désignons par $(c_1), \ldots, (c_p)$ les sous-ensembles de E formés par les p combinaisons p-1 à p-1 des p lettres :

$$a_{k-p}, \ldots, a_{k-1} \; .$$

Posons :

$$e_r = \{a_1, \ldots, a_{k-p-1}, (c_r), a_k\} \qquad (r = 1, \ldots, p)$$
$$e_{p+1} = \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$$

On vérifie sans peine les relations :

$$e_1 \cup \ldots \cup e_{p+1} = E$$
$$f_1^p \cup \ldots \cup f_{p+1}^p = F^p.$$

La dernière entraine a fortiori :

$$f_1^j \cup \ldots \cup f_{p+1}^j = F^j \qquad \text{pour } 1 \leqslant j < p.$$

10ter - THEOREME

Soit un système extérieur de degré h .

Pour $k \geqslant h-1$, on a : $s_{k+1} \leqslant (h-1)s_k$.

Soit comme au n° 5,

$$\omega_1^{\alpha_0} = 0, \ldots, \omega_h^{\alpha_{h-1}} = 0,$$

le système donné, dans lequel le degré d'une forme ω est marqué par son indice inférieur.

Remarquons d'abord que si l'on a : $d_k \leqslant k$, il en résulte ipso-facto $d_{k+1} = d_k$, c'est-à-dire $s_{k+1} = 0$, et le théorème est vrai dans ce cas. Nous supposons donc $d_k > k$.

De plus, il est clair que la restriction $k \geqslant h-1$ est essentielle. En effet, la définition de s_k ne fait intervenir, du système donné, que les équations dont le degré est au plus égal à k+1 . Connaissant s_k, on ne peut donc rien en conclure pour s_{k+1} , si k est inférieur à h-1. La condition $k \geqslant h-1$ est donc nécessaire.

Elle suffit, comme le prouve la démonstration suivante, où on suppose cette condition réalisée.

Prenant dans K^n une base (x^i), nous désignerons comme précédemment, par I_k le système linéaire en les (x^i) :

$$I_k \begin{cases} \omega_1^{\alpha_0}(\vec{x}) = 0, \quad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{x}) = 0, \ldots, \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{u}_{\lambda_{h-1}}, \vec{x}) = 0 \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1} = 1, \ldots, k). \end{cases}$$

et par II_k le suivant :

$$II_k \begin{cases} \omega_1^{\alpha_0}(\vec{u}_{\lambda_1}) = 0, \quad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) = 0, \ldots, \quad \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{u}_{\lambda_h}) = 0 \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_h = 1, \ldots, k) \end{cases}$$

Par définition, $n-d_k$ est le rang de I_k lorsque $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ sont liés seulement par II_k.

Or, I_k est formé de la réunion de I_{k-1} (système obtenu en faisant décrire à $\lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1}$ la suite : $1, \ldots, k-1$) et du système suivant :

$$S_k \begin{cases} \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_k, \vec{x}) = 0, \quad \omega_3^{\alpha_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_k, \vec{x}) = 0, \ldots, \quad \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{u}_{\lambda_{h-2}}, \vec{u}_k, \vec{x}) = 0 \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{h-2} = 1, \ldots, k-1) \end{cases}$$

Remarquons que $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k-1}$ ne sont pas liés davantage par II_k que par II_{k-1}. En effet, les équations qu'il faut ajouter à II_{k-1} pour avoir II_k renferment toutes $\vec{u}_k$. En vertu de l'hypothèse $d_k > k$, elles n'impliquent aucune relation nouvelle entre $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k-1}$; elles lient seulement $\vec{u}_k$ à ceux-ci.

De cette remarque il suit que le rang de I_{k-1}, lorsque $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k-1}$ sont liés par II_k est égal au rang de ce système lorsque ces paramètres sont liés par II_{k-1}, c'est-à-dire à $n-d_{k-1}$.

Comme : $I_k \equiv I_{k-1} \cup S_k$ (1)

on en conclut que : $n-d_k - (n-d_{k-1}) = d_{k-1} - d_k = s_k$ est le rang de S_k lorsque $\vec{x}$ est lié par I_{k-1} et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ par II_k.

De même, s_{k+1} est le rang de :

---

(1) le second membre désigne l'ensemble des équations qui appartiennent à l'un au moins des systèmes y figurant.

$$S_{k+1}\begin{cases}\omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{k+1},\vec{x}) = 0 \;,\ldots,\; \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1},\ldots,\vec{u}_{\lambda_{h-2}},\vec{u}_{k+1},\vec{x}) = 0 \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{h-2} = 1,\ldots k)\end{cases}$$

lorsque $\vec{x}$ est lié par I_k et $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_{k+1}$ par II_{k+1}.

Dans S_{k+1} les indices λ parcourent la suite des k premiers entiers. tandis que dans S_k ils ne parcourent qu'une suite de k-1 entiers.

Pour pouvoir comparer s_{k+1} et s_k, nous allons fractionner S_{k+1} en h-1 nouveaux systèmes $S^1_{k+1}, \ldots, S^{h-1}_{k+1}$, pour lesquels les indices ne décriront qu'une suite de k-1 entiers seulement, comme ceux de S_k. Plus précisément, nous allons faire en sorte d'avoir l'identité :

$$S_{k+1} \equiv S^1_{k+1} \cup \ldots \cup S^{h-1}_{k+1} \qquad (1)$$

Pour cela, nous appliquerons le lemme précédent, en posant : $E = \{1,\ldots k\}$ et $p = h-2$, inférieur à k, par hypothèse.

Désignons par $(c_1),\ldots,(c_{h-2})$ les sous-ensembles de E formés par les h-2 combinaisons h-3 à h-3 des h-2 nombres : k-h+2,...,k-1, et soit :

$$e_r = \{1,\ldots,k-h+1,(c_r),k\} \qquad (r = 1,\ldots,h-2)$$

$$e_{h-1} = \{1,\ldots,k-1\} \quad .$$

Désignons par S^t_{k+1} ce que devient S_{k+1} lorsqu'on fait décrire à $\lambda_1,\ldots,\lambda_{h-2}$ la suite e_t $(t = 1,\ldots,h-1)$.

Notons que, d'après l'hypothèse $k \geqslant h-1$, toutes les équations du système extérieur interviennent dans S^t_{k+1} aussi bien que dans S_{k+1}, ce qui ne serait pas le cas si k, par exemple, était égal à h-2 (2).

Avec notre hypothèse, on a immédiatement, d'après le lemme :

$$S_{k+1} \equiv S^1_{k+1} \cup \ldots \cup S^{h-1}_{k+1}$$

Désignons par s^t_{k+1} le rang de S^t_{k+1} lorsque $\vec{x}$ est lié par I_k et $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_{k+1}$ par II_{k+1}.

On a évidemment :

$$s_{k+1} \leq \sum_{t=1}^{h-1} s^t_{k+1} \quad .$$

Démontrons l'inégalité :

---

(1) Même remarque que pour l'identité $I_k \equiv I_{k-1} \cup S_k$

(2) voir bas de la page 17 ter.

$$s^t_{k+1} \leq s_k \qquad \text{quel que soit } t,$$

Pour cela, nous allons faire un changement de notation, dans les systèmes qui servent à définir s_k.

Soit, pour un t donné : $e_t = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$.

Dans S_k , remplaçons $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ par :

$$\vec{u}_{\alpha_1}, \dots \vec{u}_{\alpha_{k-1}}, \vec{u}_{k+1} \qquad \text{respectivement.}$$

Dès lors, s_k est le rang de du système Σ_t suivant :

$$\Sigma_t \begin{cases} \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{k+1}, \vec{x}) = 0, \quad \omega_3^{\alpha_2}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{k+1}, \vec{x}) = 0, \dots, \\ \qquad \dots, \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \dots, \vec{u}_{\lambda_{h-2}}, \vec{u}_{k+1}, \vec{x}) = 0 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_{h-2} \text{ parcourant la suite } \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\} . \end{cases}$$

lorsque $\vec{x}$ est lié par :

$$\Sigma'_t \begin{cases} \omega_1^{\alpha_0}(\vec{x}) = 0, \quad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{x}) = 0, \dots, \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \dots, \vec{u}_{\lambda_{h-1}}, \vec{x}) = 0 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_{h-1} \text{ parcourant la suite } \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\} ; \end{cases}$$

et $\vec{u}_{\alpha_1}, \dots \vec{u}_{\alpha_{k-1}}, \vec{u}_{k+1}$ par :

$$\Sigma''_t \begin{cases} \omega_1^{\alpha_0}(\vec{u}_{\lambda_1}) = 0, \dots, \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \dots, \vec{u}_{\lambda_h}) = 0 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_h \text{ parcourant } \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, k+1\} . \end{cases}$$

Mais Σ_t n'est autre que S^t_{k+1} . D'autre part, pour tout choix de t, le système I_k contient Σ'_t , car $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$ est un sous-ensemble de $\{1, \dots, k\}$, et II_{k+1} contient Σ''_t pour la même raison.

On a donc bien : $s^t_{k+1} \leq s_k$.

Par conséquent :

$$s_{k+1} \leq (h-1)s_k$$

C.Q.F.D.

Remarque : Dans le cas particulier h=2, on retrouve la suite d'inégalités signalée par E. Cartan :

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_k \geqslant \cdots$$

11 - <u>COROLLAIRE</u> :

Soit un système de degré h.

Pour $k \geqslant h-1$, l'égalité $s_k = 0$ entraine $s_{k+1} = 0$.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

Note 2 de la page 17 -

e_t ne contenant que $k-1$ termes, les dernières équations de S^t_{k+1} correspondant aux formes $\omega_h^{\alpha_{h-1}}$ seraient alors identiquement vérifiées , alors qu'elles ne le seraient pas dans S_{k+1}.

11 bis - CONSEQUENCE POUR LE GENRE DU SYSTEME

Soit un système de degré h. Si s_k est nul ($k \geqslant h-1$), le genre est égal à d_{k-1}.

En effet, on a en vertu de l'hypothèse :

$$d_o \geqslant d_1 \geqslant \dots \geqslant d_{k-1} = d_k = d_{k+1} = \dots$$

La relation : $d_{k-1} = d_i$ étant vérifiée pour une infinité de valeurs de i, le genre est bien égal à d_{k-1} (n° 8 bis) C.Q.F.D.

12 - THEOREME

Soit un système de degré h, ne contenant que des équations de degrés 1 et h.

Si s_{h-1} est nul, le système est algébriquement équivalent à celui formé par ses seules équations linéaires.

Pour simplifier l'écriture, bornons-nous à considérer un système de degré 3, ne contenant que 3 équations, dont 2 linéaires . Dans une base donnée de X^n, ce système peut s'écrire :

$$\omega \equiv A_i \, x^i = 0$$

$$\varphi \equiv B_i \, x^i = 0$$

$$\frac{1}{6} A_{ijk} \, x^i \wedge x^j \wedge x^k = 0$$

Considérons la forme suivante en les x^k :

$$A_{ijk} \, u^i \, v^j \, x^k$$

et supposons, pour fixer les idées, que le déterminant de x^1, x^2 dans ω et φ soit différent de zéro.

Que s_2 soit nul ou pas, on peut toujours trouver des coefficients $C_1,\dots,C_n$ tels que l'on ait :

$$A_{ijk} \, u^i \, v^j \, x^k \equiv C_1 \, A_i x^i + C_2 \, B_i x^i + C_3 \, x^3 + \dots + C_n \, x^n.$$

En égalant les coefficients de $x^1,\dots,x^n$, on obtient un système de n équations linéaires aux inconnues $C_1,\dots,C_n$. Soit Δ le déterminant des coefficients des inconnues.

On trouve pour $C_1, C_2, C_3, \ldots$ des expressions de la forme :

$$C_1 = \Delta^{-1} C_{ij} u^i v^j$$

$$C_2 = \Delta^{-1} D_{ij} u^i v^j$$

$$C_3 = \Delta^{-1} E_{ij} u^i v^j$$

etc...

Ici intervient l'hypothèse que s_2 est nul.
Ceci revient à dire que :

$$A_{ijk} u^i v^j x^k = 0$$

est conséquence de : $A_i x^i = 0$, $B_i x^i = 0$, lorsque les u^i et v^i sont liés par :

$$A_i u^i = 0, \quad A_i v^i = 0, \quad B_i u^i = 0, \quad B_i v^i = 0.$$

On en conclut que $C_3 x^3$, par exemple, est nécessairement de la forme :

$$\Delta^{-1}(A_i u^i F_j v^j + A_j v^j G_i u^i + B_i u^i H_j v^j + B_j v^j K_i u^i) x^3.$$

Plus généralement, $C_3 x^3 + \ldots + C_n x^n$ peut s'écrire :

$$\Delta^{-1} (A_i F_{jk} + A_j G_{ik} + B_i H_{jk} + B_j K_{ik}) u^i v^j x^k.$$

On a donc :

$$\Delta \cdot A_{ijk} u^i v^j x^k = (A_k C_{ij} + B_k D_{ij} + A_i F_{jk} + A_j G_{ik} + B_i H_{jk} + B_j K_{ik}) u^i v^j x^k.$$

D'où

$$\Delta \cdot A_{ijk} = A_k C_{ij} + B_k D_{ij} + A_i F_{jk} + A_j G_{ik} + B_i H_{jk} + B_j K_{ik}.$$

Il en résulte immédiatement l'identité suivante (où par exception, les coefficients $C_{ij}, D_{ij}, \ldots$ ne sont pas antisymétriques).

$$\Delta \cdot A_{ijk} x^i \wedge x^j \wedge x^k = (C_{ij} x^i \wedge x^j) \wedge (A_k x^k) + (D_{ij} x^i \wedge x^j) \wedge (B_k x^k)$$
$$+ (F_{jk} x^j \wedge x^k) \wedge (A_i x^i) - (G_{ik} x^i \wedge x^k) \wedge (A_j x^j)$$
$$+ (H_{jk} x^j \wedge x^k) \wedge (B_i x^i) - (K_{ik} x^i \wedge x^k) \wedge (B_j x^j)$$

Le système donné est donc algébriquement équivalent à $A_i x^i = 0$, $B_i x^i = 0$

C.Q.F.D.

13 - THEOREME - Soit un système quelconque de degré h.

Si $s_1, s_2, \ldots, s_{h-1}$ sont nuls, le système est algébriquement équivalent à celui formé par ses seules équations linéaires.

En effet, considérons d'abord le système S_1 extrait du précédent, et formé des équations de degré 1 et 2 (s'il en existe). Puisque s_1 est nul, S_1 est équivalent au système de ses équations linéaires . Le système donné est donc équivalent à celui obtenu en supprimant ses équations de degré 2.

Dans ce nouveau système, on considérera les équations de degrés 1 et 3 (s'il en existe). Comme s_2 est nul, ce système partiel est équivalent à celui formé par ses seules équations linéaires.

On peut donc se ramener à un système ne contenant ni équation de degré 2, ni équation de degré 3. Et ainsi de suite,... s_{h-1} étant nul, on voit que les équations de degré h disparaissent aussi. Le théorème est donc démontré.

14 - SYSTEME IRREDUCTIBLE VIS A VIS DU DEGRE

Théorème : Soit S un système de degré h, de caractères $s_0, s_1, \ldots,$ comprenant r_k équations de degré k+1 $(1 \leqslant k \leqslant h-1)$.

Posons : $$s'_i = \begin{cases} s_i, & \text{si } r_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } r_i = 0 \end{cases} \qquad (1 \leqslant i \leqslant h-2)$$

Si on a :

$$s_1 + \ldots + s_{h-1} > C^1_{h-1} \; s'_1 + \ldots + C^{h-2}_{h-1} \; s'_{h-2} ,$$

(où les C^j_i désignent les coefficients du binôme), il n'existe aucun système de degré inférieur à h qui soit algébriquement équivalent à S.

La démonstration consiste à vérifier que, pour un système de degré au plus égal à h-1, la somme $s_1 + \ldots + s_{h-1}$ est au plus égale à :

$$C^{1}_{h-1} \; s'_1 + \dots + C^{h-2}_{h-1} \; s'_{h-2} \; .$$

Nous nous bornerons , pour simplifier à faire cette vérification dans le cas d'un système de degré 3 :

$$\begin{cases} A^{\alpha}_{i} \, x^{i} = 0 & (\alpha = 1,\dots,r_0) \\ A^{\beta}_{ij} \, x^{i} \wedge x^{j} = 0 & (\beta = 1,\dots,r_1) \\ A^{\gamma}_{ijk} \, x^{i} \wedge x^{j} \wedge x^{k} = 0 & (\gamma = 1,\dots,r_2) \end{cases}$$

on sait que s_o est le rang de : $A^{\alpha}_{i} \, x^{i} = 0$
On voit facilement que le rang du système

$$A^{\beta}_{ij} \, u^{i} \, x^{j} = 0 \; ,$$

lorsque les (x^i) sont liés par : $A^{\alpha}_{i} \, x^{i} = 0$ et les (u^i) par : $A^{\alpha}_{i} \, u^{i} = o$ est au plus égal à s'_1 ;
que le rang du système :

$$A^{\gamma}_{ijk} \, u^{i} \, v^{j} \, x^{k} = 0,$$

lorsque les (x^i) sont liés par : $A^{\alpha}_{i} \, x^{i} = 0$, $A^{\beta}_{ij} \, u^{i} x^{j} = 0$, $A^{\beta}_{ij} \, v^{i} \, x^{j} = 0$ et les (u^i) ,(v^i) par $A^{\alpha}_{i} \, u^{i} = 0$, $A^{\alpha}_{i} \, v^{i} = 0$, $A^{\beta}_{ij} \, u^{i} \, v^{j} = 0$, est au plus égal à s'_2.

Or la somme $s_o + s_1 + s_2 + s_3$ est égale au rang du système :

$$\begin{cases} & & A^{\alpha}_{i}\, x^{i} = 0 \\ A^{\beta}_{ij}\, u^{i}x^{j} = 0 & A^{\beta}_{ij}\, v^{i}x^{j} = 0 & A^{\beta}_{ij}\, w^{i}x^{j} = 0 \\ A^{\gamma}_{ijk}\, u^{i}v^{j}x^{k} = 0 & A^{\gamma}_{ijk}\, v^{i}w^{j}x^{k} = 0 & A^{\gamma}_{ijk}\, w^{i}u^{j}x^{k} = 0 \end{cases}$$

lorsque certaines relations entre les paramètres sont vérifiées . En utilisant les remarques précédentes, on vérifie immédiatement l'inégalité à démontrer :

$$s_o + s_1 + s_2 + s_3 \leq s_o + 3s'_1 + 3s'_2 .$$

-=-=-=-=-=-=-=-

PARAGRAPHE 2 - SOLUTIONS

15 - SOLUTION D'UNE EQUATION EXTERIEURE

a) Soit une q-forme ω définie sur K^n. Une variété linéaire $V^{(1)}$ plongée dans K^n, est solution de l'équation $\omega = 0$ si la forme induite par ω sur V est la forme nulle.

Toute variété de dimension inférieure à q est ipso facto solution de $\omega = 0$. Toute variété plongée dans une variété solution est solution.
Remarque : Le fait pour une variété V d'être solution de $\omega = 0$ est une propriété intrinsèque, indépendante de toute base donnée dans K^n.

b) Un système de p vecteurs distincts $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p)$ sera dit former une solution à p dimensions (ou une p-solution) de $\omega = 0$ si la variété à p dimensions , que ces vecteurs définissent, est elle-même solution.

On vérifie que deux systèmes équivalents (au sens du N°6) de p vecteurs distincts définissent la même variété linéaire. Si l'un est une p-solution, il en est donc de même de l'autre.

---

(1) Nous ne considérons que des variétés linéaires passant par l'origine V est un sous-espace vectoriel de K^n.

16 - CONDITION POUR QUE p VECTEURS DISTINCTS FORMENT UNE p-SOLUTION

Soit ω une q-forme , définie dans K^n. Considérons p vecteurs distincts $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p)$ $(p \geq q)$. On voit sans peine que la condition nécessaire et suffisante pour que ces vecteurs définissent une p-solution de $\omega = 0$ est que, pour chaque combinaison $j_1,\ldots,j_q$ de q entiers pris parmi les p premiers, on ait :

$$\omega(\vec{a}_{j_1},\ldots,\vec{a}_{j_q}) = 0$$

17 - SOLUTION D'UN SYSTEME EXTERIEUR

a) une variété linéaire est solution d'un système extérieur si, et seulement si, elle est solution de chaque équation du système,

b) un système de p vecteurs distincts constitue une p-solution du système s'il est p-solution de chaque équation du système.

18 - SYSTEMES ALGEBRIQUEMENT EQUIVALENTS

On vérifie que, si deux systèmes extérieurs sont algébriquement équivalents, toute solution de l'un est solution de l'autre.

19 - VARIETE POLAIRE D'UNE VARIETE LINEAIRE

Nous aurons besoin , dans la suite, de la définition suivante : Soit S le système du n° 5, et V une variété linéaire quelconque à p dimensions, définie par p vecteurs distincts $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p)$.

Par définition, la variété polaire de V relativement à S, soit V^*, est la variété polaire de l'ensemble $(\vec{a}_1,\ldots \vec{a}_p)$ relativement à ce système. Cette définition se justifie en remarquant que V^* est indépendante du système $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p)$ choisi pour définir V. En effet, tout autre système de p vecteurs définissant cette variété sera équivalent au précédent, et nous savons (n° 6) que deux systèmes de vecteurs équivalents ont même variété polaire.

Remarques : 1°) D'après sa définition même, il est clair que la variété polaire, relativement à S, d'une variété quelconque V, est indépendante de la base de K^n.

2°)Soit W une variété plongée dans V. Alors W^* contient V^* :

$$W \subseteq V \quad \Longrightarrow \quad V^* \subseteq W^* .$$

20 - VARIETE POLAIRE D'UNE VARIETE SOLUTION

Soit V une variété solution à p dimensions, contenant les vecteurs indépendants $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p)$.

D'après sa définition même, V^* est le lieu du vecteur $\vec{x}$ tel que la variété définie par : $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p, \vec{x})$ soit solution.

On voit sans peine que V^* contient V. Désignons par q la dimension de V^*. Si $q = p$, V^* coïncide avec V.

Supposons $q > p$. Dès lors :

a) La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété à p+1 dimensions contenant V soit solution est qu'elle soit contenue dans V^*.

Cette condition est nécessaire . En effet, soit W une variété solution à p+1 dimensions, contenant V, $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p, \vec{a}_{p+1})$ p+1 vecteurs indépendants de W, dont les p premiers appartiennent à V.

$\vec{a}_{p+1}$ vérifie le système polaire de $\vec{a}_1;\ldots\vec{a}_p$, donc appartient à V^*, qui contient déjà $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$. Donc $W \subseteq V^*$.

Cette condition suffit . Soit W une variété à p+1 dimensions contenant V et contenue dans V^*. Elle peut être définie par p+1 vecteurs $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p, \vec{a}_{p+1})$, avec : $\vec{a}_{p+1} \in V^*$. Donc W est solution.

b) Toute variété solution à q dimensions , s'il en existe, contenant V, est identique à V^*. En effet, soit W une telle variété solution, définie par les q vecteurs indépendants : $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p,\ldots,\vec{a}_q)$, dont les p premiers appartiennent à V.

On voit aisément que chacun des vecteurs $\vec{a}_{p+1},\ldots,\vec{a}_q$ doit appartenir à V^*, qui contient déjà $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$. Donc W et V^* coïncident.

21 - SOLUTION REGULIERE

A/ DEFINITION

a) Une variété solution à p dimensions , V, est régulière si V^* est de dimension d_p.

b) Une p-solution est régulière si elle définit une variété solution régulière.

Remarques 1) Par définition même, la régularité d'une solution est une qualité intrinsèque.

2) Si la solution V de dimension p n'est pas régulière , la dimension de V^* est supérieur à d_p.

B) CAS PARTICULIER

Soit V une variété solution régulière à p dimensions

a) si V^* est de dimension p, elle coïncide avec V, De plus, on a : $d_p = p$, ce qui montre que le genre du système est égal à p.

b) si V^* est de dimension p+1, elle est elle-même solution. De plus le genre du système est égal à p+1.

On a en effet : $d_p = p+1 > p$.

Donc (n° 6) $d_{p+1} \geq p+1$.

Mais (en vertu de la non-croissance des d) : $d_{p+1} \leq d_p$ (n° 6)

Donc : $d_{p+1} = p+1$ C.Q.F.D.

22 - VARIETE PLONGEE DANS UNE VARIETE SOLUTION REGULIERE

Théorème : Toute variété plongée dans une variété solution régulière est solution régulière.

Pour simplifier, bornons-nous à un système de degré 3 :

$$\omega^\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,\dots, r_o)$$

$$\varphi^\beta = 0 \qquad (\beta = 1,\dots,r_1)$$

$$\psi^\gamma = 0 \qquad (\gamma = 1,\dots,r_2)$$

les ω , φ , ψ étant de degrés 1,2,3 respectivement.

Considérons une variété solution régulière, V_2, définie par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et démontrons que le vecteur $\vec{a}$, par exemple, définit une solution régulière.

D'après la définition des caractères, le système linéaire en les x^i (composantes de $\vec{x}$ dans une base donnée de K^n).

(1) $\omega^\alpha(\vec{x}) = 0$, (2) $\varphi^\beta(\vec{u}, \vec{x}) = 0$, (3) $\psi^\gamma(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) = 0$

(4) $\varphi^\beta(\vec{v}, \vec{x}) = 0$

est de rang : $s_o + s_1 + s_2$ lorsque les paramètres sont liés par :

(5) $\omega^\alpha(\vec{u}) = 0$, $\omega^\alpha(\vec{v}) = 0$, $\varphi^\beta(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Nous choisirons, une fois pour toutes, dans le système (1),(2),(3),(4) , $s_o + s_1 + s_2$ équations principales, dont s_o dans (1), et s_1 dans (2), qui

soient indépendantes, lorsque les paramètres sont liés comme on l'a dit. Toutes les autres sont alors des conséquences de celles-ci.

Il faut démontrer que le système linéaire en les x^i :

$$\omega^\alpha(\vec{x}) = 0 \qquad \varphi^\beta(\vec{a}, \vec{x}) = 0$$

est de rang $s_o + s_1$.

S'il était de rang inférieur, l'une au moins des équations principales situées dans (1) ou (2) serait alors une conséquence des autres. Par conséquent, lorsqu'on remplacerait $\vec{v}$ par $\vec{b}$, en même temps que $\vec{u}$ par $\vec{a}$, le système des équations principales ne pourraît être de rang $s_o + s_1 + s_2$, contrairement à l'hypothèse faite sur V_2.

Donc $\vec{a}$ définit une solution régulière.

23 - SOLUTION ORDINAIRE

a) une variété solution à p dimensions est ordinaire si elle contient une variété à p-1 dimensions solution régulière.

Par convention, toute variété solution à 1 dimension est considérée comme ordinaire.

b) une p-solution est ordinaire si elle définit une variété solution ordinaire.

Remarques : 1) ces définitions sont évidemment intrinsèques.

2) toute solution régulière est ordinaire. Mais la réciproque n'est pas exacte. Cependant, toute p-solution ordinaire est, en quelque sorte, "voisine" de p-solutions régulières, au sens du numéro suivant.

24 - p-SOLUTIONS REGULIERES "VOISINES" D'UNE p-SOLUTION ORDINAIRE

Soit $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p)$ une p-solution ordinaire du système S. Choisissons une base de K^n, et soient, dans cette base, a^i_j les composantes de $\vec{a}_j$.

Nous allons démontrer que, quel que soit ε positif, on peut trouver une p-solution régulière, $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_p)$ telle que, les composantes de $\vec{b}_j$ étant b^i_j, on ait, pour tout choix de i et j :

$$|a^i_j - b^i_j| < \varepsilon$$

$(i = 1, \ldots, n \; ; \; j = 1, \ldots, p)$.

Prenons, pour simplifier, l'écriture, un système de degré 3 :

$$(S) \quad \begin{cases} A_i^\alpha \; x^i = 0 \\ A_{ij}^\beta \; x^i \wedge x^j = 0 \\ A_{ijk}^\gamma \; x^i \wedge x^j \wedge x^k = 0 \end{cases}$$

dont nous considérerons une 2-solution ordinaire : $(\vec{a}, \vec{b})$ avec $\vec{a} = (a^1, \ldots, a^n)$; $\vec{b} = (b^1, \ldots, b^n)$, le vecteur $\vec{a}$, par exemple, étant régulier.

Par hypothèse , le système

(1) $\quad A_i^\alpha \; x^i = 0$

(2) $\quad A_{ij}^\beta \; u^i \, x^j = 0$; $\qquad$ (3) $\quad A_{ij}^\beta \; v^i \, x^j = 0$

(4) $\quad A_{ijk}^\gamma \; u^i \, v^j \, x^k = 0$

est de rang $s_o + s_1 + s_2$ lorsque les u^i et v^i sont liés par :

(5) $\quad A_i^\alpha \; u^i = 0 \qquad A_i^\alpha \; v^i = 0 \qquad A_{ij}^\beta \; u^i \, v^j = 0$

Nous choisirons, une fois pour toutes, $s_o + s_1 + s_2$ équations principales, dont les autres découlent, lorsque les u^i et v^i sont liés comme on l'a dit. Soient :

$$D_1(u^i, v^i) \; , \; \ldots, \; D_N(u^i, v^i)$$

les déterminants extraits du tableau des coefficients des x^i dans les $s_o + s_1 + s_2$ équations principales. L'hypothèse est que l'une au moins des équations: $D_1 = 0$, ..., $D_N = 0$, soit par exemple la première , n'est pas une conséquence des équations (5) . Cela étant, comme $\vec{a}$ est solution, le système

$$A_i^\alpha u^i = 0$$

est résoluble par rapport à s_o des quantités u^i, soit , par exemple, les s_o dernières, en fonction des $n-s_o$ premières, la valeur initiale de u^i étant a^i. Soient :

$$u^\lambda = \varphi^\lambda(u^1, \ldots, u^{n-s_o}) \qquad (\lambda = n-s_o + 1, \ldots, n)$$

les formules résolvant ce système, avec

$$\varphi^\lambda(a^1,\dots,a^{n-s_o}) = a^\lambda$$

φ^λ est linéaire en $u^1,\dots, u^{n-s_o}$.

Comme $\vec{a}$ est solution régulière, et que $(\vec{a}, \vec{b})$ est une 2-solution, le système

$$A_i^\alpha \; v^i = 0$$
$$A_{ij}^\beta \; u^i \; v^j = 0$$

est résoluble par rapport à s_o+s_1 des quantités v^i, soit par exemple les s_o+s_1 dernières, en fonction des $n-s_o-s_1$ premières et des u^i, la valeur initiale de u^i étant a^i, et celle de v^i étant b^i.

Soient :

$$v^\mu = \psi^\mu(u^1,\dots,u^n, v^1,\dots,v^{n-s_o-s_1})$$

$(\mu = n-s_o-s_1+1,\dots,n)$

la solution du système, avec :

$$\psi^\mu(a^1,\dots,a^n, b^1,\dots,b^{n-s_o-s_1}) = b^\mu \quad .$$

ψ^μ est holomorphe par rapport à l'ensemble de $u^1,\dots,u^n, v^1,\dots,v^{n-s_o-s_1}$ au voisinage de : $u^i = a^i$, $v^\sigma = b^\sigma$ $(\sigma = 1,\dots, n-s_o-s_1)$.

Le système $A_i^\alpha u^i = 0$, $A_i^\alpha v^i = 0$, $A_{ij}^\beta u^i v^j = 0$ admet donc la solution suivante, où l'on pose :

$$\psi^\mu(u^1,\dots,u^{n-s_o}, \varphi^{n-s_o+1}, \dots, \varphi^n, v^1,\dots,v^{n-s_o-s_1})$$

$$\equiv \theta^\mu(u^1,\dots,u^{n-s_o}, v^1,\dots,v^{n-s_o-s_1})$$

$$\begin{cases} u^\lambda = \varphi^\lambda(u^1,\dots,u^{n-s_o}) \\ v^\mu = \theta^\mu(u^1,\dots,u^{n-s_o}, v^1,\dots,v^{n-s_o-s_1}) \end{cases}$$

les fonctions φ^λ et θ^μ étant holomorphes au voisinage de : $u^\rho = a^\rho$, $v^\sigma = b^\sigma$, $(\rho = 1,\dots,n-s_o)$

L'hypothèse où nous sommes placés est que la fonction Δ des u^ρ et v^σ obtenue en remplaçant, dans D_1, u^λ par φ^λ et v^μ par θ^μ n'est pas identiquement nulle. Notons que Δ est fonction holomorphe de l'ensemble de ses arguments au voisinage de : $u^\rho = a^\rho$, $v^\sigma = b^\sigma$. Cela étant, deux cas sont possibles

a) Δ n'est pas nul au point (a^{ρ}, b^{σ})

Ceci veut dire que $(\vec{a}, \vec{b})$ est une 2-solution régulière.

b) Δ est nul en ce point.

Mais on sait que, ε arbitraire étant donné, on peut trouver un point $(a_1^{\rho}, b_1^{\sigma})$, vérifiant :

$$|a_1^{\rho} - a^{\rho}| < \varepsilon , \qquad |b_1^{\sigma} - b^{\sigma}| < \varepsilon ,$$

pour tout choix de ρ et σ, et tel que Δ ne soit pas nul au point $(a_1^{\rho}, b_1^{\sigma})$.

Posons :
$$a_1^{\lambda} = \varphi^{\lambda} (a_1^1, \ldots, a_1^{n-s_o})$$
$$v_1^{\mu} = \theta^{\mu} (a_1^1, \ldots, a_1^{n-s_o}, b_1^1, \ldots, b_1^{n-s_o-s_1})$$

Les vecteurs : $\vec{a}_1$ de composantes (a_1^i) et $\vec{b}_1$, de composantes (b_1^i), forment alors une 2-solution régulière, qui est "voisine" de $(\vec{a}, \vec{b})$, au sens indiqué.

ε étant arbitraire, le théorème est démontré.

Remarque : D'après ce théorème, s'il existe une variété solution à p dimensions, contenant une (p-1) solution régulière $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{p-1})$, il existe au moins une variété solution régulière à p dimensions. Mais il n'est pas certain a priori qu'on puisse en trouver une contenant $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{p-1})$. Nous reviendrons sur cette question au n° 26.

Corollaire - S'il existe pour le système considéré une seule variété solution ordinaire à p dimensions, V_p, celle-ci est nécessairement régulière. Dans ce cas, en effet, les p-solutions régulières "voisines" d'une p-solution ordinaire e_p définissant V_p sont nécessairement équivalentes à e_p, qui est donc régulière.

25 - SOLUTIONS D'UN SYSTEME DE GENRE g

Soit un système de caractères $d_o, d_1, d_2, \ldots$, de genre g.

a) genre 0 - Un système de genre o n'admet pas d'autre solution que le vecteur nul.

b) genre 1 - On a : $d_o > o$. Il existe donc au moins une variété solution de dimension 1 (solution ordinaire). Donc au moins une variété solution régulière à 1 dimension.

Soit V_1 une telle variété .
Comme $d_1 = 1$, V_1 coïncide avec sa variété polaire. Il n'y a donc pas de variété solution ordinaire à 2 dimensions.
c)genre 2 - On a : $d_1 > 1$. Il existe au moins une variété solution ordinaire à 2 dimensions. Donc au moins une variété solution régulière à 2 dimensions.
Soit V_2 une telle variété
Comme $d_2 = 2$, V_2 coïncide avec sa variété polaire . Il n'y a donc pas de variété solution ordinaire à 3 dimensions.
etc...

d) Généralement
Un système de genre g admet au moins une variété solution régulière à g dimensions, mais aucune variété solution ordinaire à g+1 dimensions.

26 - CAS D'IMMERSION D'UNE VARIETE SOLUTION REGULIERE DANS UNE VARIETE DE MEME SORTE

Considérons un système de genre g,

a) Supposons $s_k=o$, avec $k \leqslant g$

Nous allons démontrer que toute variété solution à k dimensions contenant une (k-1)-solution régulière est régulière.

Soit V une variété solution régulière à k-1 dimensinns, et W une variété solution à k dimensions contenant V.
V^* est exactement de dimensions d_{k-1} , donc de dimension d_k, puisque $s_k=o$
Soit d la dimension de W^*.
On a : $d \geqslant d_k$ (n° 21)
Mais $W^* \subseteq V^*$ (n° 19) qui entraine : $d \leqslant d_k$.
Donc : $d = d_k$,
et W est régulière.

b) Plus généralement, supposons que l'on ait :

$$s_1 = s_{1+1} = \dots = s_k = 0 \qquad (k \leqslant g).$$

on voit, de proche en proche, que toute variété solution à k dimensions, contenant une (l-1)-solution régulière est régulière.

26 bis - CONSEQUENCE DE LA RELATION $s_g = 0$

Soit un système de g .

a) Si s_g est nul, par chaque variété solution régulière à g-1 dimensions, il passe une et une seule variété solution à g dimensions . De plus, cette variété solution est régulière.

Soit V une solution régulière à g-1 dimensions .

V^* est de dimension : $d_{g-1} = d_g = g$, puisque $d\ s_g = 0$. Pour qu'une variété à g dimensions contenant V soit solution il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans V^* ,donc , ici, identique à V^* (n° 20). Il existe donc une et une seule solution à g dimensions contenant V.Cette solution est régulière d'après le numéro précédent.

b) Plus généralement, supposons $s_k = s_{k+1} = \ldots = s_g = 0$.Soit V. une variété solution régulière à k-1 dimensions.

Il existe, on le voit de proche en proche, une variété solution W de dimension g, contenant V.

V^* étant de dimension $d_{k-1} = d_g = g$, W coïncide avec V^* (n° 20) et est donc unique.

Cette solution est régulière, d'après le numéro précédent. On peut donc énoncer :

Si l'on a : $s_k = s_{k+1} = \ldots = s_g = 0$, par chaque variété solution régulière à k-1 dimensions, il passe une et une seule variété solution à g dimensions et cette variété solution est régulière.

PARAGRAPHE TROIS : RECHERCHE EFFECTIVE DES CARACTERES

27 - CARACTERES RESTREINTS

Revenons au système S du n°5 , défini sur K^n :

$$\begin{cases} \omega_1^{\alpha_o} = 0 & (\alpha_o = 1,\dots,r_o) \\ \vdots \\ \omega_h^{\alpha_{h-1}} = 0 & (\alpha_{h-1} = 1,\dots,r_{h-1}) \end{cases}$$

Il s'agit, connaissant $d_o, d_1, \dots, d_{k-1}$, de calculer effectivement d_k.

Si on a : $d_{k-1} \leqslant k-1$, le problème ne se pose pas . Nous supposerons donc $d_{k-1} > k-1$.

Dans le calcul de d_k interviennent alors les systèmes I_k et II_k

$$(I_k) \qquad \omega_1^{\alpha_o}(\vec{x}) = 0 \quad , \quad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{x}) = 0, \dots, \quad \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \dots, \vec{u}_{\lambda_{h-1}}, \vec{x}) = 0$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_{h-1} = 1, \dots, k)$;

$$(II_k) \qquad \omega_1^{\alpha_o}(\vec{u}_{\lambda_1}) = 0, \quad \omega_2^{\alpha_1}(\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}) = 0, \dots, \quad \omega_h^{\alpha_{h-1}}(\vec{u}_{\lambda_1}, \dots, \vec{u}_{\lambda_h}) = 0.$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_h = 1, \dots, k)$.

$\varphi_1, \dots, \varphi_k$ étant k formes linéaires indépendantes définies sur K^n, nous désignerons par I_k^* le système obtenu en adjoignant à I_k les équations

$$\varphi_j(\vec{x}) = 0 \qquad (j = 1, \dots, k)$$

et par $L_{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k}$ la variété linéaire que I_k^* définit.

Soit d_k^* la dimension de $L_{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k}$ lorsque les paramètres $\vec{u}_j$ sont liés seulement par II_k.

La caractère restreint δ_k relatif à l'adjonction des φ_j sera défini par :

$$\delta_k = d_k^* + k.$$

On a évidemment : $\delta_k \geqslant d_k$.

L'intérêt des δ_k tient à ce qu'ils sont plus faciles à calculer que les d_k[1] (quoi qu'il paraisse) et que, sous une hypothèse, précisée au numéro suivant, on a : $\delta_k = d_k$.

Nous désignerons par θ la k-forme décomposée :

$$\theta = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$$

28 - THEOREME

S'il existe une k-solution ordinaire $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ telle que :

$$\theta(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \neq 0 ,$$

On a :

$$\delta_k = d_k.$$

Ce théorème énonce une propriété intrinsèque, indépendante de la base de K^n.

Pour le démontrer, il est commode d'acapter la base aux formes φ_j considérées.

Faisons donc un changement de variables tel que l'on ait :

$$\varphi_1 \equiv x^1 , \quad \ldots \quad , \quad \varphi_k \equiv x^k .$$

Désignons par a^i_j , les composantes de $\vec{a}_j$ dans la nouvelle base.

$\theta(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ n'est autre que la première composante de $\vec{a}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_k$. (déterminant formé par les k premières lignes et colonnes du tableau a^i_j).

Soit $a^{1\ldots k}$ cette composante, différente de zéro par hypothèse.

Puisque la k-solution $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ est ordinaire, on peut, d'après le n° 24, trouver une k-solution régulière $(\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_k)$ telle que la première composante $b^{1\ldots k}$ de $\vec{b}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{b}_k$ ne soit pas nulle. Notons que, dans la base considérée, $n - \delta_k$ est le rang du système I'_k déduit de I_k en remplaçant par zéro les coefficients de $x^1, \ldots, x^k$. (d'où le nom de "caractère restreint" donné à δ_k).

Cela étant, supposons $\delta_k > d_k$, c'est-à-dire le rang de I'_k inférieur à $s_o + \ldots + s_k$.

---

(1) du moins si les formes φ_j sont conveanblement choisies.

Il en résulte que la compatibilité des équations de I_k, compte tenu de II_k, exige une relation au moins entre $x^1,\ldots,x^k$, non identiquement vérifiée. Donc lorsqu'on prend pour les $\vec{u_j}$ des vecteurs tels que II_k soit vérifié, et I_k de rang $s_o+\ldots+s_k$, on ne peut résoudre ce dernier système en donnant à $x^1,\ldots,x^k$ des valeurs arbitraires.

Mais considérons la k-solution régulière $(\vec{b_1},\ldots,\vec{b_k})$. Son système polaire, de rang $s_o+\ldots+s_k$, admet évidemment les solutions distinctes $\vec{b_1},\ldots,\vec{b_k}$. Etant données k constantes arbitraires $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$, il admet aussi, puisque $b^{1\ldots k}$ n'est pas nul, un vecteur solutinn dont les k premières coordonnées sont égales respectivement à $\gamma_1\ldots\gamma_k$.

Comme $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ sont arbitraires, nous sommes amenés à une contradiction avec l'hypothèse . On a donc bien : $\delta_k = d_k$ (C.Q.F.D.)

29 - APPLICATION A LA RECHERCHE DES CARACTERES

L'application réitérée de ce théorème simplifie la recherche des caractères et du genre d'un système.

Considérons de nouveau le système S du n° 5, et voyons comment peut se faire la recherche des caractères. On cherche d'abord le caractère s_o.

Si s_o est inférieur à n, il existe un vecteur solution non nul : $\vec{a_1}$. Supposons que la première coordonnée de $\vec{a_1}$ soit différente de zéro. Pour calculer s_1, on forme le système réduit I_1' , obtenu en supprimant dans I_1 les termes en x^1 . Le rang de I_1' lorsque les paramètres sont liés par II_1 donne s_o+s_1. D'où , par soustraction, on déduit s_1.

Si $s_o + s_1 < n-1$, il existe des 2-solutions ordinaires. Soit $(\vec{b_1},\vec{b_2})$ l'une d'entre elles (on peut reconnaître si elle est ordinaire ou non, étant donnée qu'on connait maintenant s_o et s_1). Supposons que la 1ère coordonnée de $\vec{b_1} \wedge \vec{b_2}$ soit différente de zéro. Pour calculer s_2, on forme le système réduit I_{12}' obtenu en supprimant dans I_2 les termes en x^1 et ceux en x^2, le rang de I_{12}' lorsque les paramètres sont liés par II_2 donne $s_o+s_1+s_2$.
D 'où s_2 .
et ainsi de suite .....

30 - EXEMPLE

Considérons le système extérieur suivant, à 7 variables.

$$\omega \equiv a_2(a_3+a_4)x_1 + a_1(a_2^2 - a_3 - a_4)x_2 + a_2^2\,(x_4+x_6) = 0$$

$$\varphi \equiv (a_5+a_7)\,(x_3 + x_4) + a_6\,x_5 + a_5x_6 = 0$$

$$\frac{1}{2}\,A_{ij}\,x^i \wedge x^j \equiv a_2^2x_1 \wedge x_2 + (x_3 + x_4) \wedge (a_2x_1 - a_1x_2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\,B_{ij}x^i \wedge x^j \equiv (x_3 + x_4) \wedge (x_5 + x_7) = 0$$

On supposera : $a_2 \cdot a_6 \neq 0$.
On trouve aisément : $s_o = 2$.
Il existe au moins un vecteur solution non nul, par exemple le vecteur :

$$\vec{a} = (a_2a_6,\ 0,\ 0,\ a_2a_6,\ a_5(a_3 + a_4) + a_2a_7,\ (a_2 - a_3 - a_4)\,a_6,\ 0)$$

Sa première coordonnée n'est pas nulle. Formons donc I_1' . Il vient :

$$I_1' \quad \begin{cases} a_1(a_2^2 - a_3 - a_4)\,x_2 + a_2^2\,(x_4 + x_6) = 0 \\ (a_5 + a_7)(x_3 + x_4) + a_6\,x_5 + a_5\,x_6 = 0 \\ (-a_1u_4-a_1u_3 + a_2^2\,u_1)\,x_2 + (a_1u_2 - a_2u_1)\,(x_3 + x_4) = 0 \\ (u_5 + u_7)(x_3 + x_4) - (u_3 + u_4)(x_5 + x_7) = 0 \end{cases}$$

Et l'on doit chercher le rang de I_1' lorsque les paramètres u_i vérifient :

$$II_1 \quad \begin{cases} a_2^2\,u_4 = A_1u_1 + A_2u_2 + A_6u_6 \\ a_2^2\,a_6\,u_5 = B_1u_1 + B_2u_2 + B_3u_3 + B_6u_6 \end{cases}$$

en posant :

$A_1 = -a_2(a_3 + a_4)$ $\quad A_2 = -a_1(a_2^2 - a_3 - a_4)$ $\quad A_6 = -a_2^2$

$B_1 = a_2(a_3+a_4)(a_5+a_7)$ $\quad B_2 = a_1(a_5 + a_7)(a_2^2 - a_3 - a_4)$

$B_3 = -a_2^2\,(a_5 + a_7)$ $\quad B_6 = a_2^2\,a_7$

Δ ,déterminant des coefficients de x_4, x_5, x_6, x_7 dans I_1' , est égal à : $a_2^2a_6(a_1u_2 - a_2u_1)(u_3+u_4)$.

Les relations II_1 n'entrainent pas que ce déterminant soit nul. Donc $s_o + s_1 = 4$, $s_1 = 2$.

Connaissant s_1, on peut juger maintenant de la régularité ou non régularité de $\vec{a}$. On voit que ce vecteur est régulier. Cherchons une 2-solution $(\vec{a},\vec{b})$ le contenant, et dont la première coordonnée pluckérienne[1] soit différente de zéro. On prendra $\vec{b}$ de la forme :

$$\vec{b} = (0, 1, *, \ldots, *)$$

les étoiles remplaçant des nombres convenablement choisis. Sans qu'il soit besoin de faire aucun calcul, on voit que le système polaire de $\vec{a}$ admet effectivement une solution de cette forme. Il suffit de constater que I'_1 reste de rang 4 quand on remplace les u_i par les coordonnées de $\vec{a}$. (Δ ne s'annule pas). Donc il existe bien une 2-solution remplissant la condition indiquée.

Formons donc, pour calculer $s_o+s_1+s_2$, le système réduit I'_{12}. Il vient :

$$I'_{12} \quad \begin{cases} x_4 + x_6 = 0 \\ (a_5+a_7)(x_3 + x_4) + a_6x_5 + a_5x_6 = 0 \\ (a_1u_2 - a_2u_1)\,(x_3 + x_4) = 0 \\ (u_5+u_7)(x_3+x_4)-(u_3+u_4)(x_5+x_7) = 0 \\ (a_1v_2-a_2v_1)(x_3+x_4) = 0 \\ (v_5+v_7)(x_3+x_4) - (v_3 + v_4)(x_5 + x_7) = 0. \end{cases}$$

Et l'on doit chercher le rang de I'_{12} lorsque les paramètres u_i et v_i vérifient le système II_2 :

$$II_2 \quad \begin{cases} a_2^2u_4 = A_1u_1 + A_2u_2 + A_6u_6 \\ a_2^2a_6u_5 = B_1u_1 + B_2u_2 + B_3u_3 + B_6u_6 \\ a_2^2v_4 = A_1v_1 + A_2v_2 + A_6v_6 \\ a_2^2a_6v_5 = B_1v_1 + B_2v_2 + B_3v_3 + B_6v_6 \\ \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{7} A_{ij}\, u_iv_j = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{7} B_{ij}u_iv_j = 0 \quad . \end{cases}$$

---

(1) C'est-à-dire la première composante de $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Dans ces conditions, les 4 premières équations de I'_{12} sont distinctes, car les deux premières équations de II_2 (qu'il suffit de considérer, étant donné que les 4 premières équations de I'_{12} ne mettent pas en cause les v_i) n'entrainent pas que Δ soit nul.

D'autre part, chacune des deux dernières équations de I'_{12} est une conséquence des précédentes. On voit, en effet , que le déterminant des coefficients de x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 dans les 5 premières équations de I'_{12} est nul identiquement , (même sans tenir compte de II_2), et de même du déterminant analogue correspondant au système formé par les 4 premières équations de I'_{12} et par la dernière . Donc le rang de I'_{12} compte tenu de II_2, est égal à 4:

$$s_o + s_1 + s_2 = 4$$

D'où $$s_2 = 0.$$

Comme le système est de degré 2, tous les caractères s_i suivants sont nuls. Le genre est donc égal à 3 : $s_o + s_1 + s_2 + s_3 = 7 - 3$.

Remarquons que la recherche de s_2 n'a exigé que le calcul de deux déterminants d'ordre 5.

Si on n'avait pas tenu compte de la simplification apportée par le théorème du n° 28, c'est six déterminants qu'il aurait fallu calculer. Notons enfin que, Δ n'étant pas nul, identiquement, lorsqu'on remplace les u^i par les coordonnées de $\vec{a}$, le système polaire de $(\vec{a},\vec{b})$ admet une solution $\vec{c}$ de la forme :

$$\vec{c} = (0,0,1,*\ ,\ *,\ldots,\ *).$$

Donc, en remplaçant au besoin $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ par une 3-solution équivalente on voit que le système donné admet une 3-solution régulière, définie par un tableau dont les trois premières lignes représentent la matrice unité d'ordre 3.

31 - AUTRE EXEMPLE

Soit à chercher les n premiers caractères et le genre du système à 2n+1 variables :

$$a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n - x^{2n+1} = 0$$

$$x^1 \wedge x^{n+1} + \ldots + x^n \wedge x^{2n} = 0$$

$$\frac{1}{n!} A_{i_1 \ldots i_n} x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_n} = 0 \qquad (i_1 \ldots, i_n = 1, \ldots 2_n)$$

où n est un entier quelconque $\geqslant 2$, et où l'on suppose :

$$A_{n+1,n+2,\ldots,2n} \neq 0.$$

On a : $s_o = 1$.

Le vecteur : $\vec{b}_1 = (\underbrace{1,0,\ldots,0}_{2n}, a_1)$ est solution

Pour calculer $s_o + s_1$ formons I'_1 et II_1 ; On trouve , si $n > 2$

$$I'_1 \quad \begin{cases} a_2x^2 + \ldots + a_nx^n - x^{2n+1} = 0 \\ -u^{n+2}x^2 - \ldots - u^{2n}x^n + u^1x^{n+1} + \ldots + u^nx^{2n} = 0 \end{cases}$$

$$II_1 \quad a_1u^1 + \ldots + a_nu^n - u^{2n+1} = 0$$

Comme les équations de I'_1 ne contiennent pas u^{2n+1} , il est clair que :
$s_o + s_1 = 2$.
D'où $s_1 = 1$.

Connaissant s_1, on peut juger de la régularité de $\vec{b}_1$. En fait ce vecteur est régulier.
Cherchons une 2-solution de la forme $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ avec : $\vec{b}_2 = (0,1,*,\ldots,*)$.
On peut prendre :

$$\vec{b}_2 = (\underbrace{0,1,0,\ldots,0}_{2n},a_2)$$

Comme $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ a sa première coordonnée pluckérienne différente de zéro, $s_o+s_1+s_2$ s'obtient en considérant I'_{12} et II_2. On trouve si $n > 3$:

$$I'_{12} \quad \begin{cases} a_3x^3 + \ldots + a_nx^n - x^{2n+1} = 0 \\ -u^{n+3}x^3 - \ldots - u^{2n}x^n + u^1x^{n+1} + \ldots + u^nx^{2n} = 0 \\ -v^{n+3}x^3 - \ldots - v^{2n}x^n + v^1x^{n+1} + \ldots + v^nx^{2n} = 0 \end{cases}$$

$$II_2 \quad \begin{cases} a_1u^1 + \ldots + a_nu^n - u^{2n+1} = 0 \\ a_1v^1 + \ldots + a_nv^n - v^{2n+1} = 0 \\ u^1v^{n+1} - v^1u^{n+1} + \ldots + u^nv^{2n} - v^nu^{2n} = 0 \end{cases}$$

La dernière équation de II_2 (la seule qu'il soit nécessaire de considérer) n'entraine pas que le déterminant des coefficients de x^{n+1} , x^{n+2} , x^{2n+1}, dans I'_{12} ,

c'est-à-dire $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ u^1 & u^2 & 0 \\ v^1 & v^2 & 0 \end{vmatrix}$

soit nul.

En effet, en prenant tous les u^i nuls, sauf $u^1 = 1$ et $u^{2n+1} = a_1$, tous les v^i nuls, sauf $v^2 = 1$, et $v^{2n+1} = a_2$, (ce qui permet de satisfaire II_2), le déterminant n'est pas nul.

$$\text{Donc} \quad s_o + s_1 + s_2 = 3 \ , \quad s_2 = 1.$$

Connaissant s_2, on peut juger de la régularité de $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. En fait, cette 2-solution est régulière .

Etc...

On trouve ainsi, de proche en proche :

$$s_o = s_1 = s_2 = \dots = s_{n-2} = 1,$$

et on vérifie qu'il existe une (n-1) solution ordinaire, soit $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1})$ avec:

$$\vec{b}_k = (\underbrace{\overbrace{0,\dots,0,1}^{k},0,\dots,0}_{2n},a_k) \qquad (k = 1,\dots,n-1)$$

la somme $s_o + \dots + s_{n-1}$ s'obtient donc en considérant :

$I'_{1,2,\dots,n-1}$ et II_{n-1} , qui sont :

$$I'_{1,\dots,n-1} \begin{cases} a_n x^n - x^{2n+1} = 0 \\ -u_\lambda^{2n} \ x^n + u_\lambda^1 \ x^{n+1} + \dots + u_\lambda^n \ x^{2n} = 0 \qquad (\lambda = 1,\dots,n-1) \\ A_{i_1 \dots i_n} \ u_1^{i_1} \dots u_{n-1}^{i_{n-1}} \ x^{i_n} = 0 \end{cases}$$

$$II_{n-1} \begin{cases} a_1 u_\lambda^1 + \dots + a_n u_\lambda^n - u_\lambda^{2n+1} = 0 \\ u_\lambda^1 \ u_\mu^{n+1} - u_\mu^1 u_\lambda^{n+1} + \dots + u_\lambda^n u_\mu^{2n} - u_\mu^n u_\lambda^{2n} = 0 \end{cases}$$

$(\lambda , \mu = 1,\dots,n-1)$

Le déterminant des coefficients de $x^{n+1}, x^{n+2}, \dots , x^{2n+1}$ dans $I'_{1,2,\dots,n-1}$ est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & , \ldots\ldots\ldots , & 0 & , & -1 \\ u_1^1 , & , \ldots\ldots\ldots , & u_1^n & , & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ u_{n-1}^1 & , \ldots\ldots\ldots , & u_{n-1}^n & , & 0 \\ A_{i_1 \ldots i_{n-1}, n+1} \, u_1^{i_1} \ldots u_{n-1}^{i_{n-1}} & , \ldots\ldots\ldots , & A_{i_1 \ldots i_{n-1}, 2n} \, u_1^{i_1} \ldots u_{n-1}^{i_{n-1}} & , & 0 \end{vmatrix}$$

Les équations de II_{n-1} n'entrainent pas qu'il soit nul.
En effet, on e peut satisfaire à II_{n-1} en prenant tous les u_λ^j nuls ($\lambda = 1,\ldots,n-1$; $j=1,\ldots,2n$) sauf u_λ^λ et $u_\lambda^{n+\lambda}$ arbitraires, et en choisissant convenablement les u_λ^{2n+1} .

Dans ces conditions, Δ n'est pas identiquement nul, car le coefficient de $u_1^1 \, u_1^{n+1} \ldots u_{n-1}^{n-1} \, u_{n-1}^{2n-1}$ est :

$$A_{n+1, n+2, \ldots, 2n} ,$$

différent de zéro , par hypothèse.

On a donc : $s_o + \ldots + s_{n-1} = n+1.$

D'où $s_{n-1} = 2.$

Le système comprend 2n+1 variables .

Comme $s_o + \ldots + s_{n-1} < 2n+1 - (n-1)$,

on a :

$$s_o + \ldots + s_n \leq 2n+1 - n = n+1 ,$$

ce qui entraine :

$$s_n = 0$$

L'égalité : $s_o + \ldots + s_n = 2n+1 - n,$

montre alors que le système est de genre n. Notons que le système polaire de $(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_{n-1}})$ admet une solution de la forme :

$$(\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, *, \ldots, *)$$

ce qui entraine que le système donné admet une n-solution ordinaire $(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ défini par un tableau dont les n premières lignes représentent la matrice unité d'ordre n.

PARAGRAPHE 4 - ENSEMBLES DE SOLUTIONS DANS E^n

Nous supposons, dans cette fin de chapitre, que le système extérieur considéré est défini sur E^n, espace vectoriel euclidien à n dimensions sur les nombres réels. On pourra identifier les éléments de $(E^n)^*$ avec ceux de E^n, ce qui permettra d'abréger le langage. De plus, on pourra parler de la distance de deux vecteurs, ou de deux p-vecteurs, et de la norme d'un vecteur.

32 - p-VECTEURS UNITAIRES CORRESPONDANT A UNE VARIETE LINEAIRE

A toute variété linéaire à p dimensions, V, de E^n, correspondent deux p-vecteurs unitaires, éléments de $\overset{p}{\wedge} E^n$, ceux obtenus en faisant le produit extérieur de p vecteurs indépendants quelconques de V, $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$, et en divisant le résultat par la norme de ce p-vecteur simple.

Comme l'ordre des vecteurs $\vec{a}_i$ n'est pas imposé, on peut associer à V deux p-vecteurs unitaires opposés.

Remarque : Etant donné une variété linéaire V, définie par p vecteurs indépendants $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$, on désigne par "coordonnées pluckériennes" de V les composantes de $\vec{a}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_p$. Ces coordonnées, définies à un facteur d'ensemble près, ne dépendent pas des vecteurs $\vec{a}_i$ choisis pour définir V.

cf. E. Cartan, Systèmes différentiels extérieurs, p. 21.

33 - CONDITION POUR QU'UN p-VECTEUR DEFINISSE UNE VARIETE LINEAIRE

Un p-vecteur , de composantes contravariantes $t^{i_1\ldots i_p}$ dans une base donnée, n'est un p-vecteur simple que si certaines relations $\mathcal{R}$ homogènes et quadratiques par rapport aux composantes, sont vérifiées. (cf. E.Cartan, op; cit. p. 25).

Si ces relations sont vérifiées, le p-vecteur définit une variété linéaire de E^n et une seule.

34 - CONDITION POUR QU'UN p-VECTEUR DEFINISSE UNE VARIETE SOLUTION

Soit un p-vecteur t et :

$$\omega_1 = 0,\ldots, \omega_{\ldots} = 0$$

un système extérieur

La condition pour que t définisse une variété solution du système est d'abord que les relations quadratiques $\mathcal{R}$ entre les composantes de t soient vérifiées, et ensuite que la valeur de chaque forme ω_i pour le tenseur t soit le tenseur nul. (c'est-à-dire celui dont toutes les composantes sont nulles).

CHAPITRE DEUX

SYSTEMES DIFFERENTIELS EXTERIEURS EN INVOLUTION

L'étude des équations de Monge-Ampère introduit certains systèmes différentiels extérieurs non fermés. Le but de ce chapitre est la démonstration, pour une classe de tels systèmes (que nous appellerons "systèmes presque fermés") de théorèmes d'existence semblables à ceux que M.E. Cartan a démontrés ou énoncés pour les systèmes différentiels extérieurs fermés-1-.

PARAGRAPHE UN : GENERALITES

V_n désigne, dans ce paragraphe, une variété différentiable, que nous supposerons , pous simplifier de classe C^∞ (2).

37 - ESPACE DES p-FORMES EN UN POINT DE V_n

Soit x_o un point de V_n, T_{x_o} , $T^*_{x_o}$ les espaces vectoriels tangents en ce point à V_n.

Une forme extérieure de degré p, ou p-forme, au point x_o de V_n, n'est autre chose qu'un tenseur antisymétrique covariant d'ordre p.

L'ensemble des p-formes en x_o forme un sous-espace vectoriel de la p-ième puissance tensorielle de $T^*_{x_o}$. Ce sous-espace est de dimension C_n^p (cf. A. Lichnerowicz op.cit.p.22.).

Le produit extérieur d'une p-forme par une p'-forme, en x_o, est une opération bien connue, sur laquelle nous n'insisterons pas.

37 bis - FORME DIFFERENTIELLE EXTERIEURE

Ce numéro et les deux suivants sont extraits (parfois mot pour mot) des pages 29 à 37 du livre de M. Lichnerowicz "Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie."

Donnons-nous, dans un domaine Δ de V_n, entourant x_o, un champ de p-formes : nous dirons que nous nous sommes donnés sur Δ une forme différentielle extérieure de degré p, ou une p-forme différentielle.

-1- cf. E. Cartan op.cit. pages 67,74,77 .
(2) Pour la définition des variétés différentiables,cf.A.Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie,pages 1,2 .

Si V_n est rapportée aux coordonnées locales (x^i), une p-forme différentielle ω peut être représentée localement par la formule :

$$\omega = \frac{1}{p!} A_{i_1 \ldots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

les coefficients antisymétriques $A_{i_1 \ldots i_p}$ désignant des fonctions des x^i, de classe C^∞.

38 - DIFFERENTIATION EXTERIEURE

On appelle différentiation extérieure d'une p-forme α une opération d qui lui fasse correspondre une (p+1)-forme $d\alpha$ et qui jouisse des 3 propriétés suivantes :

a) Si $\alpha = \beta + \gamma$, alors $d\alpha = d\beta + d\gamma$.

b) Si φ est une o-forme, et α une p-forme, $d(\varphi\alpha) = d\varphi \wedge \alpha + \varphi \, d\alpha$.

c) la différentielle extérieure de toute p-forme décomposable[1] (p=1,...,n est nulle.

On démontre que ces trois axiomes définissent une opération d et une seule.

Cette opération est visiblement intrinsèque, par définition même.

On démontre que l'effet de cette opération sur un produit extérieur est défini par la formule suivante, où α désigne une p-forme :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \, \alpha \wedge d\beta .$$

Enfin, en coordonnées locales (x^i), on a, pour différentielle extérieure de la forme ω du numéro précédent :

$$d\omega = \frac{1}{p!} dA_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

39 - IMAGE RECIPROQUE D'UNE FORME PAR UNE APPLICATION

Soit μ une application de V_n dans une variété W_p.

Considérons deux formes différentielles extérieures quelconques, α et β, définies sur W_p, et soient $\mu^*\alpha$ et $\mu^*\beta$ leurs images réciproques dans V_n. On démontre les propriétés essentielles suivantes :

---

(1) une p-forme différentielle α est dite décomposable s'il existe p fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ telles qu'α s'exprime localement par :

$$\alpha = d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_p$$

$$\mu^*(\alpha \wedge \beta) = (\mu^* \alpha) \wedge (\mu^* \beta)$$

$$\mu^* d\alpha = d\mu^* \alpha$$

Remarque : Ces propriétés sont valables en particulier pour une variété V_n plongée dans W_p. La forme $\mu^* \alpha$ est dite : forme induite par α sur V_n.

40 - SOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE EXTERIEURE

Soit définie sur une variété V_n, une forme différentielle extérieure ω, de degré h.

Une variété V, plongée dans V_n, est une variété intégrale, ou une solution, de l'équation $\omega = 0$, si la forme induite par ω sur V est la forme nulle.

Toute variété de dimension inférieure à h est ipsofacto solution de $\omega = 0$.

Toute variété plongée dans une variété intégrale est intégrale.

Remarque : Le fait pour une variété V d'être intégrale de $\omega = 0$ est une propriété intrinsèque, indépendante des coordonnées locales choisies.

41 - CONSEQUENCE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE EXTERIEURE

On démontre le théorème suivant :

Etant donné une équation différentielle extérieure $\omega = 0$, toute variété V solution de cette équation vérifie aussi la suivante : $d\omega = 0$.

En effet, soit μ l'application de V dans V_n.

On a : $\mu^* \omega \equiv 0$

Par conséquent : $d(\mu^* \omega) \equiv 0$

Donc (n° 39) $\mu^* d\omega \equiv 0$

42 - SOLUTION D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL EXTERIEUR

Une variété est solution d'un système différentiel extérieur si, et seulement si, elle est solution de chacune de ses équations.

43 - CARACTERES ET GENRE D'UN SYSTEME

Soit, défini sur V^n (1), un système différentiel extérieur S :

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_k = 0.$$

x_o étant un point de V_n, nous désignerons par S_{x_o} (système associé à S en x_o) le système extérieur, défini sur T_{x_o}, dont les premiers membres sont les p-formes $\omega_1, \ldots, \omega_k$ correspondant à x_o.

Les caractères et le genre de S en x_o, sont, par définition, ceux du système S_{x_o}. Ces nombres sont donc invariants dans tout changement admissible de coordonnées locales dans V_n.

44 - SYSTEMES ALGEBRIQUEMENT EQUIVALENTS

a) l'équivalence algébrique entre systèmes différentiels extérieurs se définit comme au n° 9. Il suffit de remplacer "constante" par "fonction scalaire", "forme extérieure" par "forme différentielle extérieure".

b) On démontre que, si deux systèmes différentiels extérieurs sont algébriquement équivalents, toute solution de l'un est solution de l'autre.

c) Il est clair d'après le n° 10, que deux systèmes différentiels extérieurs algébriquement équivalents dans un domaine, ont les mêmes caractères dans ce domaine.

PARAGRAPHE DEUX : SYSTEMES FERMES EN INVOLUTION

Désormais, jusqu'à la fin du chapitre III, les systèmes différentiels extérieurs considérés seront définis sur une variété différentiable V_n de classe C^ω.

45 - SYSTEME FERME

Considérons un système différentiel extérieur S, défini sur V^n.

$$S \begin{cases} \omega_1^{\alpha_o} = 0 & (\alpha_o = 1, \ldots, r_o) \\ \omega_2^{\alpha_1} = 0 & (\alpha_1 = 1, \ldots, r_1) \\ \vdots & \\ \omega_h^{\alpha_{h-1}} = 0 & (\alpha_{h-1} = 1, \ldots, r_{h-1}) \end{cases}$$

(1) plus exactement : dans un domaine ouvert de V_n. Cette remarque vaut pour toute la suite du chapitre.

le degré de chaque forme ω étant marqué par l'indice inférieur.

On dit que ce système est fermé si les différentielles extérieures des premiers membres appartiennent à l'"anneau" gradué défini par ses premiers membres , c'est-à-dire si l'on a des identités de la forme :

$$T \begin{cases} d\,\omega_1^{\alpha_o} \equiv B_{1,\alpha_1}^{\alpha_o}\,\omega_2^{\alpha_1} + B_{1,\alpha_o'}^{\alpha_o} \wedge \omega_1^{\alpha_o'} & (\alpha_o' = 1,\dots,r_o) \\ d\,\omega_2^{\alpha_1} \equiv B_{2,\alpha_2}^{\alpha_1}\,\omega_3^{\alpha_2} + B_{2,\alpha_1'}^{\alpha_1} \wedge \omega_2^{\alpha_1'} + B_{2,\alpha_o}^{\alpha_1} \wedge \omega_1^{\alpha_o} & (\alpha_1' = 1,\dots,r_1) \\ \vdots \\ d\,\omega_h^{\alpha_{h-1}} \equiv B_{h,\alpha_{h-1}'}^{\alpha_{h-1}} \wedge \omega_h^{\alpha_{h-1}'} + \dots + B_{h,\alpha_o}^{\alpha_{h-1}} \wedge \omega_1^{\alpha_o} & (\alpha_{h-1}' = 1,\dots,r_{h-1}) \end{cases}$$

Les B étant des formes différentielles extérieures de classe C^{ω} , sur V_n (une fonction scalaire est considérée comme une forme de degré zéro) de degrés tels que les seconds membres soient des formes différentielles extérieures homogènes.

46 - ELEMENT INTEGRAL A p DIMENSIONS

Considérons un système différentiel extérieur S, fermé ou non, défini sur V_n. x_o étant un point de cette variété , soit S_{x_o} le système extérieur associé à S en x_o.

Une p-solution de S_{x_o} est nommée, relativement à S : élement intégral à p dimensions, d'origine x_o.

47 - ELEMENT INTEGRAL REGULIER, ORDINAIRE

Soit S un système différentiel extérieur fermé, défini sur V_n, rapportée aux coordonnées locales (x^i). Reprenons les notations du n° 45.

a) point régulier

x_o, de coordonnées (x_o^i) , est dit régulier pour S , si dans son domaine , les coefficients de ce système et ceux des formes B intervenant aux seconds membres du système T sont holomorphes.

b) élément intégral régulier à p dimensions

Un élément intégral à p dimensions d'origine x_o est dit régulier si et seulement si, son origine est un point régulier et s'il est p-solution régulière du système S_{x_o} associé à S en x_o.

c) élément intégral ordinaire à p dimensions.

Un élément intégral à p dimensions d'origine x_o est ordinaire si la variété linéaire qu'il définit dans T_{x_o} contient un élément intégral régulier à p-1 dimensions . [On dira alors que l'élément à p dimensions donné "contient" lui-même un élément régulier à p-1 dimensions].

48 - SYSTEME A VARIABLES INDEPENDANTES IMPOSEES.

Supposons que l'on se donne a priori p variables indépendantes ($p < n$) par exemple $x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_p}$, parmi les coordonnées locales auxquelles V_n est rapportée.

Pour ce choix de variables indépendantes, un élément intégral à p dimensions d'origine x_o :

$$e_p = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p)$$

sera dit normal s'il est ordinaire, et si la coordonnée pluckérienne $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ de la variété linéaire définie par e_p n'est pas nulle. (la base de T_{x_o} est celle définie par le système de coordonnées locales adoptées sur V_n).

49 - SYSTEME FERME EN INVOLUTION

Soit S un système fermé à p variables indépendantes défini sur V_n.

Par définition, ce système est en involution en x_o si son genre est au moins égal à p , et s'il existe en ce point un élément intégral à p dimensions , normal pour les variables indépendantes imposées .(cf. E.Cartan, p;88).

On doit à M.Cartan d'importants théorèmes d'existence concernant les systèmes fermés en involution.

PARAGRAPHE TROIS : SYSTEMES PRESQUE FERMES EN INVOLUTION

50 - SYSTEME PRESQUE FERME

Reprenons les notations du n° 45, le Système S sera dit "presque fermé" si les identités T sont vérifiées , sauf peut-être celles dont les premiers membres sont les différentielles $d\overset{\alpha}{\underset{h}{\omega}}{}^{h-1}$.

En d'autres termes, il n'est pas nécessaire que les différentielles extérieures des formes de degré maximum appartiennent à l'"anneau" gradué déterminé par les premiers membres du système.

51 - ELEMENTS INTEGRAUX

a) Les définitions des éléments intégraux réguliers, ordinaires, sont les mêmes que pour un système fermé, à cette différence près qu'on n'a plus à tenir compte, pour définir les points réguliers, des coefficients qui pourraient éventuellement intervenir dans l'expression de $d\overset{\alpha}{\underset{h}{\omega}}{}^{h-1}$ au moyen des premiers membres du système (au cas où celui-ci serait , non seulement presque fermé, mais fermé).

b) Si le système est à variables indépendantes imposées, la définition des éléments normaux est la même que dans le cas des systèmes fermés.

52 - VARIETE INTEGRALE REGULIERE EN UN POINT

a) Supposons V_n rapportée aux coordonnées locales (x^i), Une variété intégrale V_k, plongée dans V_n, et définie au voisinage de x_o (de coordonnées x_o^i) par les équations :

$$x^i = f^i(u^1,\ldots,u^k)$$

est dite tangente en ce point à l'élément intégral formé par les vecteurs suivants de T_{x_o} :

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^1}\right)_o , \ldots, \vec{a}_k = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^k}\right)_o .$$

b) Cela étant, supposons que p des coordonnées x^i aient été prises comme variables indépendantes . Une variété intégrale V_k, passant en x_o, est dite régulière en ce point si elle y est tangente à un élément intégral régulier à k dimensions, contenu dans un élément intégral à p dimensions, normal pour les variables indépendantes imposées.

53 - SYSTEME PRESQUE FERME EN INVOLUTION

On dira qu'un système presque fermé à p variables indépendantes, est en involution en x_o si son genre et son degré sont au moins égaux à p, et s'il existe en ce point un élément intégral à p dimensions, normal pour les variables indépendantes imposées. Remarquons qu'on peut toujours supposer le degré égal à p. S'il était supérieur, on pourrait supprimer les équations de degré supérieur à p, vérifiées elles-mêmes sur toute variété à p dimensions.

Soient s_i et d_i les caractères du système.
On a, par hypothèse, $d_p \geqslant p$.
Nous allons énoncer, pour ces systèmes un théorème local d'existence :
Posons : $d_{p-1} - p = \sigma_p \geqslant s_p$.

54 - 55 - THEOREME D'EXISTENCE

Soit k le plus grand indice inférieur ou égal à p , tel que $s_{k-1} + s_k \neq 0$, et V_{k-1} une variété intégrale à k-1 dimensions , passant en x_o, et régulière en ce point.

a) Si σ_p est nul, il existe au voisinage de x_o une et une seule variété intégrale à p dimensions contenant V_{k-1}.

b) Si σ_p est positif, il existe une infinité de variétés intégrales à p dimensions répondant à cette condition.
Elles dépendent, au sens du théorème d'existence de Cauchy-Kowalewska,
de σ_p fonctions arbitraires de k arguments ;
" σ_p " " " k+1 " ;
.....
" σ_p " " " p "

Faisons quelques remarques sur cet énoncé .
1°) l'hypothèse $\sigma_p=0$ entraine $s_p = 0$ donc $d_{p-1} = d_p = p$, c'est-à-dire que le genre est égal à p. L'unicité de la solution contenant V_{k-1} est liée alors au fait qu'il n'existe qu'un seul élément intégral à p dimensions d'origine x_o, contenant un élément régulier à k-1 dimensions donné (n° 26 bis).

2°) Dans l'hypothèse $\sigma_p \neq 0$ et $s_p \neq 0$ ce théorème se rattache à un théorème d'existence énoncé et démontré par E. Cartan pour les systèmes fermés.("Systèmes différentiels extérieurs"page 74). Dans la démonstration

(qui suit celle donnée aux pages 69 à 74) , à aucun moment n'intervient le fait que $d\psi_\alpha$ (notation de la p.61) appartient à l'"anneau" gradué déterminé par les formes θ_α , φ_α , ψ_α . D'où l'on déduit aisément que le dit théorème subsiste pour les systèmes presque fermés en involution.

Nous allons démontrer le théorème d'existence dans l'hypothèse (a)(1) , et donner des indications sur sa démonstration dans l'hypothèse (b), lorsque s_p est nul. Par hypothèse, il existe un élément intégral normal à p dimensions d'origine x_o. En faisant au besoin une substitution linéaire sur les variables indépendantes (que nous supposerons être les p premières) on peut supposer que cet élément est de la forme :

$$(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_p)$$

l'élément $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1})$ étant régulier, et la matrice formée par les p premières lignes et colonnes du tableau des composantes de $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ étant identique à la matrice unité d'ordre p.

56 - DEMONSTRATION DANS L'HYPOTHESE (a) ET LE CAS PARTICULIER : p=4, k=3.

Considérons le système différentiel extérieur presque fermé:

$$\omega^\alpha \equiv A^\alpha_i \, dx^i = 0 \qquad (\alpha, \alpha' = 1, \ldots, r_o)$$

$$\varphi^\beta \equiv 1/2 \; A^\beta_{ij} \, dx^i \wedge dx^j = 0 \qquad (\beta, \beta' = 1, \ldots, r_1)$$

$$\psi^\gamma \equiv 1/6 \; A^\gamma_{ijk} \cdot dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 0 \qquad (\gamma, \gamma' = 1, \ldots, r_2)$$

$$\theta^\delta = \frac{1}{24} A^\delta_{ijkl} \, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = 0 \qquad (\delta, \delta' = 1, \ldots, r_3)$$

de caractères s_o, s_1, s_2 avec $s_3 = s_4 = \ldots = 0$(2)

et $4 = n-(s_o + s_1 + s_2)$.

On a, par hypothèse, des identités de la forme :

$$d\omega^\alpha \equiv B^\alpha_\beta \, \varphi^\beta + C^\alpha_{\alpha'} \wedge \omega^{\alpha'}$$

$$d\varphi^\beta \equiv D^\beta_\gamma \, \psi^\gamma + E^\beta_{\beta'} \wedge \varphi^{\beta'} + F^\beta_\alpha \wedge \omega^\alpha$$

$$d\psi^\gamma \equiv G^\gamma_\delta \, \theta^\delta + H^\gamma_{\gamma'} \wedge \psi^{\gamma'} + J^\gamma_\beta \wedge \varphi^\beta + K^\gamma_\alpha \wedge \omega^\alpha$$

---

(1) Ce théorème, dans l'hypothèse (a) et pour un système fermé, est énoncé par M.E.Cartan, à la Page 77, de son livre "Sur les systèmes différentiels extérieurs". La démonstration n'est pas donnée. Pourtant le théorème ne découle, semble-t-il , ni du premier théorème d'existence (p;69) ni du second (p. 74).

(2) notons que $s_4 = 0$ etc... est une conséquence de $s_3 = 0$ cf. n° 11.

Considérons le système Σ suivant :

(1) $A_i^{\alpha}\, dx^i = 0$

(2) $A_{ij}^{\beta}\, u^i dx^j = 0$ (3) $A_{ij}^{\beta}\, v^i dx^j = 0$

(4) $A_{ijk}^{\gamma}\, u^i v^j dx^k = 0$

Par hypothèse, ce système est de rang $s_o+s_1+s_2$ lorsque les u^i et v^i sont liés par :

(5) $A_i^{\alpha}\, u^i = 0$ $A_i^{\alpha}\, v^i = 0$ $A_{ij}^{\beta}\, u^i v^j = 0$

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que, dans ces conditions, on peut choisir comme équations principales (indépendantes) dans Σ, les suivantes :

les s_o premières équations (1)
les s_1 premières équations (2)
les s_2' premières équations (3)
les s_2'' premières équations (4) avec $s_2' + s_2'' = s_2$.

Par hypothèse $s_3 = 0$.
C'est dire que le système suivant Σ' :

(6) $A_i^{\alpha}\, dx^i = 0$

(7) $A_{ij}^{\beta}\, u^i\, dx^j = 0$ (8) $A_{ij}^{\beta}\, v^i dx^j = 0$ $A_{ij}^{\beta}\, w^i\, dx^j = 0$

(9) $A_{ijk}^{\gamma}\, u^i v^j dx^k = 0$ $A_{ijk}^{\gamma}\, v^i w^j dx^k = 0$ $A_{ijk}^{\gamma}\, u^i w^j dx^k = 0$

$$A_{ijkl}^{\delta}\, u^i v^j w^k\, dx^l = 0.$$

est de rang $s_o + s_1 + s_2$ lorsque les u^i, v^i, w^i sont astreints à vérifier :

$A_i^{\alpha}\, u^i = 0$ $A_i^{\alpha}\, v^i = 0$ $A_i^{\alpha}\, w^i = 0$
$A_{ij}^{\beta}\, u^i v^j = 0$ $A_{ij}^{\beta}\, v^i w^j = 0$ $A_{ij}^{\beta}\, w^i u^j = 0$

$$A_{ijk}^{\gamma}\, u^i v^j w^k = 0$$

Dans ces conditions, Σ' se réduit évidemment au système des équations suivantes : les s_o premières équations (6), les s_1 premières équations (7), les s_2' premières équations (8), les s_2'' premières équations (9)
On a donc, pour tout indice β, une identité de la forme suivante, où les indices a varient de 1 à s_o, les indices b de 1 à s_1, les indices c de 1 à s_2', les indices d de 1 à s_2'',

$$(10)\quad A^{\beta}_{il}\, w^i dx^l \equiv L^{\beta}_{1a} A^a_{il}\, dx^l + L^{\beta}_{2b} A^b_{il}\, u^i dx^l + L^{\beta}_{3c} A^c_{il}\, v^i\, dx^l$$

$$+ L^{\beta}_{4d} A^d_{ijl}\, u^i v^j dx^l + M^{\beta}_{1\alpha} A^{\alpha}_i\, u^i + M^{\beta}_{2\alpha} A^{\alpha}_i\, v^i$$

$$+ N^{\beta}_{\alpha} A^{\alpha}_i\, w^i + P^{\beta}_{\beta'} A^{\beta'}_{ij}\, u^i v^j + Q^{\beta}_{\beta'} A^{\beta'}_{ij} v^i w^j$$

$$+ R^{\beta}_{\beta'} A^{\beta'}_{ij}\, w^i u^j + T^{\beta}_{\gamma} A^{\gamma}_{ijk}\, u^i v^j w^k ,$$

les L^{β}_{1a} , L^{β}_{2b} , L^{β}_{3c} , L^{β}_{4d} étant des fractions rationnelles des u^i, v^i, w^i; les $M^{\beta}_{1\alpha}$, $M^{\beta}_{2\alpha}$, N^{β}_{α} , $P^{\beta}_{\beta'}$, $Q^{\beta}_{\beta'}$, $R^{\beta}_{\beta'}$, T^{β}_{γ} étant des formes linéaires en les dx^l , ayant pour coefficients des fractions rationnelles des u^i, v^i, w^i.

On aurait des identités de même forme en remplaçant , au premier membre $A^{\beta}_{il}\, w^i\, dx^l$ successivement par $A^{\gamma}_{ijl}\, v^i w^j dx^l$, par $A^{\gamma}_{ijl} u^i w^j dx^l$ et par $A^{\delta}_{ijkl}\, u^i v^j w^k dx^l$.

Cela étant, arrivons à la démonstration du théorème.

Soit V_2 la variété intégrale donnée, passant par le point régulier x_o, de coordonnées (x^i_o) , tangente en ce point à l'élément $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On peut supposer, au besoin en effectuant localement un changement réversible de variables indépendantes, que, sur V_2, x_3 et x_4 sont constants. Les équations de cette variété sont donc de la forme :

$$x^3 = x^3_o \quad , \quad x^4 = x^4_o \quad , \quad x^{\lambda} = f^{\lambda}_2\ (x^1, x^2)$$

$$(\ \lambda = 5, \ldots, n)$$

α) Cherchons une variété intégrale V_3, passant par x_o, admettant x^1, x^2, x^3 pour variables indépendantes et sur laquelle: $x^4 = x^4_o$, telle que l'intersection de V_3 par $x^3 = x^3_o$ soit V_2.

V_3 doit donc vérifier le système suivant (où λ , μ , ν prenent les valeurs 5,...,n) dans les coefficients duquel x^4 a la valeur constante indiquée. (Nous écrivons, pour simplifier , x^i_j au lieu de $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}$):

(11) $A^{\alpha}_{k} + A^{\alpha}_{\lambda}\ x^{\lambda}_{k} = 0$ avec $k = 1,2,.$

(12) $A^{\alpha}_{3} + A^{\alpha}_{\lambda}\ x^{\lambda}_{3} = 0$

(13) $A^{\beta}_{12} + A^{\beta}_{1\lambda}\ x^{\lambda}_{2} + A^{\beta}_{\lambda 2}\ x^{\lambda}_{1} + A^{\beta}_{\lambda\mu}\ x^{\lambda}_{1}\ x^{\mu}_{2} = 0$

(14) $A^{\beta}_{k3} + A^{\beta}_{k\lambda}\ x^{\lambda}_{3} + A^{\beta}_{\lambda 3}\ x^{\lambda}_{k} + A^{\beta}_{\lambda\mu}\ x^{\lambda}_{k}\ x^{\mu}_{3} = 0$ $(k= 1,2)$

(15) $$\begin{cases} A^{\gamma}_{123} + A^{\gamma}_{12\lambda}\ x^{\lambda}_{3} + A^{\gamma}_{1\lambda 3}\ x^{\lambda}_{2} + A^{\gamma}_{\lambda 23}\ x^{\lambda}_{1} + A^{\gamma}_{1\lambda\mu}\ x^{\lambda}_{2}\ x^{\mu}_{3} \\ + A^{\gamma}_{\lambda 2\mu}\ x^{\lambda}_{1}\ x^{\mu}_{3} + A^{\gamma}_{\lambda\mu 3}\ x^{\lambda}_{1}\ x^{\mu}_{2} + A^{\gamma}_{\lambda\mu\nu}\ x^{\lambda}_{1}\ x^{\mu}_{2}\ x^{\nu}_{3} = 0 \end{cases}$$

Au voisinage de l'élément intégral $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'origine x_o, (c'est-à-dire pour des valeurs des x^{λ}_{j} peu différentes de a^{λ}_{j} ; $j = 1,2,$), le système aux n-4 inconnues x^{λ}_{3} formé par les équations (12), (14), (15) est compatible puisqu'il admet la solution $\vec{e}_3$, et contient exactement $s_o + s_1 + s_2$ équations distinctes, puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est régulier.

Il est donc régulier.

Soit Σ_3 la solution de ce système d'équations aux dérivées partielles définie par :

$$x^{\lambda} = f^{\lambda}_{3}\ (x^1, x^2, x^3)$$

vérifiant la condition initiale :

(16) $$f^{\lambda}_{3}\ (x^1, x^2, x^3_o) \equiv f^{\lambda}_{2}\ (x^1, x^2)\ .$$

Notons que cette solution est unique .

Démontrons que Σ_3 est V_3 , c'est-à-dire vérifie aussi (11) et (13).

Désignons par $\bar{\omega}^{\alpha}$, $\bar{\varphi}^{\beta}$, $\bar{B}^{\alpha}_{\beta}$,... ce que deviennent ω^{α}, φ^{β}, B^{α}_{β},... sur Σ_3.

Posons :

$$\bar{\omega}^{\alpha} = S^{\alpha}_{1}\ dx^1 + S^{\alpha}_{2}\ dx^2$$

$$\bar{\varphi}^{\beta} = S^{\beta}_{12}\ dx^1 \wedge dx^2$$

$$\bar{C}^{\alpha}_{\alpha'} = C^{\alpha}_{\alpha',1}\ dx^1 + C^{\alpha}_{\alpha',2}\ dx^2 + C^{\alpha}_{\alpha',3}\ dx^3$$

$$\bar{E}^{\beta}_{\beta'} = E^{\beta}_{\beta',1}\ dx^1 + E^{\beta}_{\beta',2}\ dx^2 + E^{\beta}_{\beta',3}\ dx^3\ .$$

On a :

$$d\bar{\omega}^{\alpha} = \left(\frac{\partial S_2^{\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial S_1^{\alpha}}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial S_1^{\alpha}}{\partial x^3}\, dx^1 \wedge dx^3 - \frac{\partial S_2^{\alpha}}{\partial x^3}\, dx^2 \wedge dx^3$$

$$d\bar{\varphi}^{\beta} = \frac{\partial S_{12}^{\beta}}{\partial x^3}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Egalons les coefficients de $dx^1 \wedge dx^3$ dans $d\bar{\omega}^{\alpha}$ et $\bar{B}^{\alpha}_{\beta}\ \bar{\varphi}^{\beta} + \bar{C}^{\alpha}_{\alpha'} \wedge \bar{\omega}^{\alpha'}$:

$$-\frac{\partial S_1^{\alpha}}{\partial x^3} = -C^{\alpha}_{\alpha',3}\ S_1^{\alpha'}.$$

Or : $S_1^{\alpha}(x^1,x^2,x^3_o) \equiv 0$ Donc $S_1^{\alpha}(x^1,x^2,x^3) \equiv 0$

Egalons les coefficients de $dx^2 \wedge dx^3$;

$$-\frac{\partial S_2^{\alpha}}{\partial x^3} = -C^{\alpha}_{\alpha',3}\ S_2^{\alpha'}$$

Donc $S_2^{\alpha}(x^1,x^2,x^3) \equiv 0.$

Et l'équation $\omega^{\alpha} = 0$ est vérifiée, quel que soit α .

Egalons les coefficients de $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ dans

$d\bar{\varphi}^{\beta}$ et $\bar{D}^{\beta}_{\gamma}\ \bar{\varphi}^{\gamma} + \bar{E}^{\beta}_{\beta'} \wedge \bar{\varphi}^{\beta'} + \bar{F}^{\beta}_{\alpha} \wedge \bar{\omega}^{\alpha}$.

Il vient :

$$\frac{\partial S_{12}^{\beta}}{\partial x^3} = E^{\beta}_{\beta;3}\ S_{12}^{\beta'}$$

Comme $S_{12}^{\beta}(x^1,x^2,x^3) \equiv 0$, puisque V_2 est intégrale, on en déduit,

$$S_{12}\ (x^1,x^2,x^3) \equiv 0.$$

Donc Σ_3 est V_3.

β) Cherchons une variété intégrale V_4 , passant par x_o, admettant x^1,x^2,x^3,x^4 pour variables indépendantes telle que l'intersection de V_4 par : $x^4 = x^4_o$ soit V_3 .

V_4 doit donc vérifier le système suivant (où λ , μ , ν , ξ , parcourent la suite 5,...,n).

(17) $$A^{\alpha}_{k} + A^{\alpha}_{\lambda}\, x^{\lambda}_{k} = 0 \qquad (k = 1,2,3)$$

(18) $$A^{\alpha}_{4} + A^{\alpha}_{\lambda}\, x^{\lambda}_{4} = 0$$

(19) $$A^{\beta}_{kl} + A^{\beta}_{k\lambda}\, x^{\lambda}_{l} + A^{\beta}_{\lambda l}\, x^{\lambda}_{k} + A^{\beta}_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}_{k}\, x^{\mu}_{l} = 0 \qquad (k,l = 1,2,3).$$

(20) $$A^{\beta}_{k4} + A^{\beta}_{k\lambda}\, x^{\lambda}_{4} + A^{\beta}_{\lambda 4}\, x^{\lambda}_{k} + A^{\beta}_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}_{k}\, x^{\mu}_{4} = 0 \qquad (k = 1,2).$$

(21) $$A^{\beta}_{34} + A^{\beta}_{3\lambda}\, x^{\lambda}_{4} + A^{\beta}_{\lambda 4}\, x^{\lambda}_{3} + A^{\beta}_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}_{3}\, x^{\mu}_{4} = 0$$

(22) $$\begin{cases} A^{\gamma}_{124} + A^{\gamma}_{12\lambda}\, x^{\lambda}_{4} + A^{\gamma}_{1\lambda 4}\, x^{\lambda}_{2} + A^{\gamma}_{\lambda 24}\, x^{\lambda}_{1} + A^{\gamma}_{1\lambda\mu}\, x^{\lambda}_{2}\, x^{\mu}_{4} \\ + A^{\gamma}_{\lambda 2\mu}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{4} + A^{\gamma}_{\lambda\mu 4}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{2} + A^{\gamma}_{\lambda\mu\nu}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{2}\, x^{\nu}_{4} = 0 \end{cases}$$

(23) $$\begin{cases} A^{\gamma}_{k34} + A^{\gamma}_{k3\lambda}\, x^{\lambda}_{4} + A^{\gamma}_{k\lambda 4}\, x^{\lambda}_{3} + A^{\gamma}_{\lambda 34}\, x^{\lambda}_{k} + A^{\gamma}_{k\lambda\mu}\, x^{\lambda}_{3}\, x^{\mu}_{4} \\ + A^{\gamma}_{\lambda 3\mu}\, x^{\lambda}_{k}\, x^{\mu}_{4} + A^{\gamma}_{\lambda\mu 4}\, x^{\lambda}_{k}\, x^{\mu}_{3} + A^{\gamma}_{\lambda\mu\nu}\, x^{\lambda}_{k}\, x^{\mu}_{3}\, x^{\nu}_{4} = 0 \end{cases} \qquad (k = 1,2)$$

(24) $$\begin{cases} A^{\delta}_{1234} + A^{\delta}_{123\lambda}\, x^{\lambda}_{4} + A^{\delta}_{12\lambda 4}\, x^{\lambda}_{3} + A^{\delta}_{1\lambda 34}\, x^{\lambda}_{2} + A^{\delta}_{\lambda 234}\, x^{\lambda}_{1} \\ + A^{\delta}_{12\lambda\mu}\, x^{\lambda}_{3}\, x^{\mu}_{4} + A^{\delta}_{1\lambda 3\mu}\, x^{\lambda}_{2}\, x^{\mu}_{4} + A^{\delta}_{1\lambda\mu 4}\, x^{\lambda}_{2}\, x^{\mu}_{3} + A^{\delta}_{\lambda 23\mu}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{4} \\ + A^{\delta}_{\lambda 2\mu 4}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{3} + A^{\delta}_{\lambda\mu 34}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{2} + A^{\delta}_{1\lambda\mu\nu}\, x^{\lambda}_{2}\, x^{\mu}_{3}\, x^{\nu}_{4} + A^{\delta}_{\lambda 2\mu\nu}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{3}\, x^{\nu}_{4} \\ + A^{\delta}_{\lambda\mu 3\nu}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{2}\, x^{\nu}_{4} + A^{\delta}_{\lambda\mu\nu 4}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{2}\, x^{\nu}_{3} + A^{\delta}_{\lambda\mu\nu\xi}\, x^{\lambda}_{1}\, x^{\mu}_{2}\, x^{\nu}_{3}\, x^{\xi}_{4} = 0 \end{cases}$$

Au voisinage de l'élément intégral $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'origine x_o, le système aux n-4 inconnues x^{λ}_{4} formé par les équations (18), (20) (22) est compatible, puisqu'il admet la solution $\vec{e}_4$, et contient exactement $s_o + s_1 + s_2 = n-4$ équations distinctes puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est régulier (cf. n° 22 bis).

Il est donc régulier.

Soit $\mathcal{L}_4$ la solution de ce système d'équations aux dérivées partielles, définie par : $x^{\lambda} = f^{\lambda}_{4}(x^1, x^2, x^3, x^4)$.

avec la condition initiale :

$$(25) \qquad f_4^\lambda\,(x^1, x^2, x^3, x_o^4) \equiv f_3^\lambda\,(x^1, x^2, x^3).$$

Notons que cette solution est unique .

Démonstrons que Σ_4 est V_4 , c'est-à-dire vérifie (17), (19), (21), (23), (24).

Désignons par : $\bar{\omega}^\alpha$, $\bar{\varphi}^\beta$, $\bar{B}^\alpha_\beta$, ..., ce que deviennent : ω^α, φ^β, B^α_β , ..., sur Σ_4 . (nous utilisons donc les mêmes notations que sur Σ_3 pour ne pas compliquer, mais avec un sens différent, bien entendu).

Posons :

$$\bar{\omega}^\alpha = S_1^\alpha\, dx^1 + S_2^\alpha\, dx^2 + S_3^\alpha\, dx^3$$

$$\bar{\varphi}^\beta = S_{12}^\beta\, dx^1 \wedge dx^2 + S_{13}^\beta\, dx^1 \wedge dx^3 + S_{23}^\beta\, dx^2 \wedge dx^3 + S_{34}^\beta\, dx^3 \wedge dx^4$$

$$\bar{\psi}^\gamma = S_{134}^\gamma\, dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + S_{234}^\gamma\, dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + S_{123}^\gamma\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$\bar{\theta}^\delta = S_{1234}^\delta\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

$$\left.\begin{cases} \bar{C}^{\alpha}_{\alpha'} = C^{\alpha}_{\alpha',h}\, dx^h \\ \bar{E}^{\beta}_{\beta'} = E^{\beta}_{\beta',h}\, dx^h \\ \bar{F}^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{2} F^{\beta}_{\alpha,gh}\, dx^g \wedge dx^h \\ \bar{H}^{\gamma}_{\gamma'} = H^{\gamma}_{\gamma',h}\, dx^h \\ \bar{J}^{\gamma}_{\beta} = \frac{1}{2} J^{\gamma}_{\beta gh}\, dx^g \wedge dx^h \\ \bar{K}^{\gamma}_{\alpha} = \frac{1}{6} K^{\gamma}_{\alpha,fgh}\, dx^f \wedge dx^g \wedge dx^h \end{cases}\right\} \quad (f,g,h = 1,2,3,4)$$

On a :

$$d\bar{\omega}^\alpha = \left(\frac{\partial S_2^\alpha}{\partial x^1} - \frac{\partial S_1^\alpha}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial S_3^\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial S_2^\alpha}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial S_1^\alpha}{\partial x^3} - \frac{\partial S_3^\alpha}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1$$

$$-\left(\frac{\partial S_1^\alpha}{\partial x^4}\, dx^1 + \frac{\partial S_2^\alpha}{\partial x^4}\, dx^2 + \frac{\partial S_3^\alpha}{\partial x^4}\, dx^3\right) \wedge dx^4$$

$$d\bar{\varphi}^{\beta} = \left(\frac{\partial S^{\beta}_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial S^{\beta}_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial S^{\beta}_{13}}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$-\left[\frac{\partial S^{\beta}_{12}}{\partial x^4} dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial S^{\beta}_{13}}{\partial x^4} + \frac{\partial S^{\beta}_{34}}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial S^{\beta}_{23}}{\partial x^4} + \frac{\partial S^{\beta}_{34}}{\partial x^2}\right) dx^2 \wedge dx^3\right] \wedge dx^4$$

$$d\bar{\psi}^{\gamma} = \left(-\frac{\partial S^{\gamma}_{134}}{\partial x^2} - \frac{\partial S^{\gamma}_{123}}{\partial x^4} + \frac{\partial S^{\gamma}_{234}}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 .$$

Egalons les coefficients de $dx^1 \wedge dx^4$ dans $d\bar{\omega}^{\alpha}$ et $\bar{B}^{\alpha}_{\beta}\, \bar{\varphi}^{\beta} + \bar{C}^{\alpha}_{\alpha'} \wedge \bar{\omega}^{\alpha'}$.

Il vient :

$$-\frac{\partial S^{\alpha}_{1}}{\partial x^4} = -C^{\alpha}_{\alpha';4}\, S^{\alpha'}_{1} .$$

Or : $S^{\alpha}_{1}(x^1,x^2,x^3,x^4_o) \equiv 0$. Donc $S^{\alpha}_{1}(x^1,x^2,x^3,x^4) \equiv 0$

On démontre de même l'identité : $S^{\alpha}_{2} \equiv 0$.

Egalons les coefficients de $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4$ dans $d\bar{\varphi}^{\beta}$ et $\bar{D}^{\beta}_{\gamma}\, \bar{\psi}^{\gamma} + \bar{E}^{\beta}_{\beta'} \wedge \bar{\varphi}^{\beta'} + \bar{F}^{\beta}_{\alpha} \wedge \bar{\omega}^{\alpha}$:

$$-\frac{\partial S^{\beta}_{12}}{\partial x^4} = E^{\beta}_{\beta';4}\, S^{\beta'}_{12} .$$

Or $S^{\beta}_{12}(x^1,x^2,x^3,x^4_o) \equiv 0$, Donc : $S^{\beta}_{12}(x^1,x^2,x^3,x^4) \equiv 0$.

Pour vérifier que $\bar{\omega}^{\alpha}$, $\bar{\varphi}^{\beta}$, $\bar{\psi}^{\gamma}$ sont nuls, il nous reste à démontrer que S^{α}_{3} , S^{β}_{13} , S^{β}_{23} , S^{β}_{34} , S^{γ}_{134} , S^{γ}_{234} , S^{γ}_{123} , S^{δ}_{1234} sont nuls identiquement.

Pour y arriver nous allons d'abord établir que S^{β}_{34} , S^{γ}_{134} , S^{γ}_{234} , S^{δ}_{1234} s'expriment linéairement au moyen de S^{α}_{3} , S^{β}_{13} , S^{β}_{23} , S^{γ}_{123} .

Nous utiliserons pour cela l'identité (10) , dans laquelle nous remplacerons ;

$(u^1,\ldots,u^n)$ par $(1,0,0,0,\ x^5_1;\ldots,x^n_1)$

$(v^1,\ldots,v^n)$ par $(0,1,0,0,\ x^5_2,\ldots,x^n_2)$

$(w^1,\ldots,w^n)$ par $(0,0,1,0,\ x^5_3,\ldots,x^n_3)$

$(dx^1,\ldots,dx^n)$ par $(0,0,0,1,\ x^5_4,\ldots,\ x^n_4)$.

Il vient λ , μ , ν , parcourant la suite 5,6,...,n.

$$A^{\beta}_{34} + A^{\beta}_{3\lambda} x^{\lambda}_4 + A^{\beta}_{\lambda 4} x^{\lambda}_3 + A^{\beta}_{\lambda\mu} x^{\lambda}_3 x^{\mu}_4 \equiv \bar{L}^{\beta}_{1a}(A^a_4 + A^a_{\lambda} x^{\lambda}_4)$$

$$+ \bar{L}^{\beta}_{2b}\,(A^b_{14} + A^b_{1\lambda} x^{\lambda}_4 + A^b_{\lambda 4}\, x^{\lambda}_1 + A^b_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_4)$$

$$+ \bar{L}^{\beta}_{3c}\,(A^b_{24} + A^b_{2\lambda} x^{\lambda}_4 + A^b_{\lambda 4}\, x^{\lambda}_2 + A^b_{\lambda\mu} x^{\lambda}_2 x^{\mu}_4)$$

$$+ \bar{L}^{\beta}_{4d}\begin{pmatrix} A^d_{124} + A^d_{12\lambda} x^{\lambda}_4 + A^d_{1\lambda 4}\, x^{\lambda}_2 + A^d_{\lambda 24}\, x^{\lambda}_1 + A^d_{1\lambda\mu}\, x^{\lambda}_2 x^{\mu}_4 \\ + A^d_{\lambda 2\mu}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_4 + A^d_{\lambda\mu 4}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_2 + A^d_{\lambda\mu\nu}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_2 x^{\nu}_4 \end{pmatrix}$$

$$+ \bar{M}^{\beta}_{1\alpha}\,(A^{\alpha}_1 + A^{\alpha}_{\lambda} x^{\lambda}_1) + \bar{M}^{\beta}_{2\alpha}\,(A^{\alpha}_2 + A^{\alpha}_{\lambda}\, x^{\lambda}_2) + \bar{N}^{\beta}_{\alpha}\,(A^{\alpha}_3 + A^{\alpha}_{\lambda}\, x^{\lambda}_3)$$

$$+ \bar{P}^{\beta}_{\beta'}\,(A^{\beta'}_{12} + A^{\beta'}_{1\lambda}\, x^{\lambda}_2 + A^{\beta'}_{\lambda 2}\, x^{\lambda}_1 + A^{\beta'}_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_2)$$

$$+ \bar{Q}^{\beta}_{\beta'}\,(A^{\beta'}_{23} + A^{\beta'}_{2\lambda}\, x^{\lambda}_3 + A^{\beta'}_{\lambda 3}\, x^{\lambda}_2 + A^{\beta'}_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}_2 x^{\mu}_3)$$

$$+ \bar{R}^{\beta}_{\beta'}\,(A^{\beta'}_{13} + A^{\beta'}_{1\lambda}\, x^{\lambda}_3 + A^{\beta'}_{\lambda 3}\, x^{\lambda}_1 + A^{\beta'}_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_3)$$

$$+ \bar{T}^{\beta}_{\gamma}\begin{pmatrix} A^{\gamma}_{123} + A^{\gamma}_{12\lambda} x^{\lambda}_3 + A^{\gamma}_{1\lambda 3}\, x^{\lambda}_2 + A^{\gamma}_{\lambda 23}\, x^{\lambda}_1 + A^{\gamma}_{1\lambda\mu}\, x^{\lambda}_2 x^{\mu}_3 \\ + A^{\gamma}_{\lambda 2\mu}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_3 + A^{\gamma}_{\lambda\mu 3}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_2 + A^{\gamma}_{\lambda\mu\nu}\, x^{\lambda}_1 x^{\mu}_2 x^{\nu}_3 \end{pmatrix}$$

les $\bar{L}^{\beta}_{1a}$, $\bar{L}^{\beta}_{2b}$, ..., $\bar{R}^{\beta}_{\beta'}$, $\bar{T}^{\beta}_{\gamma}$ étant des fonctions rationnelles des x^{λ}_1, x^{λ}_2, x^{λ}_3, x^{λ}_4.

Sur $\sum_4$ les parenthèses qui suivent $\bar{L}^{\beta}_{1a}$, $\bar{L}^{\beta}_{2b}$, $\bar{L}^{\beta}_{3c}$, $\bar{L}^{\beta}_{4d}$ sont nulles identiquement.

Il reste donc :

$$S^{\beta}_{34} \equiv \bar{M}^{\beta}_{1\alpha}\, S^{\alpha}_1 + \bar{M}^{\beta}_{2\alpha}\, S^{\alpha}_2 + \bar{N}^{\beta}_{\alpha}\, S^{\alpha}_3 + \bar{P}^{\beta}_{\beta'}\, S^{\beta'}_{12} + \bar{Q}^{\beta}_{\beta'} S^{\beta'}_{23} + \bar{R}^{\beta}_{\beta'} S^{\beta'}_{13} + \bar{T}^{\beta}_{\gamma}\, S^{\gamma}_{123},$$

qui se réduit, en vertu d'un résultat précédent, à :

$$(26) \qquad S^{\beta}_{34} \equiv \bar{N}^{\beta}_{\alpha}\, S^{\alpha}_3 + \bar{Q}^{\beta}_{\beta'} S^{\beta'}_{23} + \bar{R}^{\beta}_{\beta'}\, S^{\beta'}_{13} + \bar{T}^{\beta}_{\gamma}\, S^{\gamma}_{123} .$$

Si, maintenant, on remplace, au premier membre de (10), $A^{\beta}_{il}\, w^i dx^l$ successivement par $A^{\gamma}_{ijl}\, u^i w^j dx^l$, $A^{\gamma}_{ijl}\, v^i w^j dx^l$ et $A^{\delta}_{ijkl}\, u^i v^j w^k dx^l$, on démontre

exactement de la même façon des identités de la forme :

$$(27) \qquad S^{\gamma}_{134} \equiv U^{\gamma}_{1\alpha} S^{\alpha}_{3} + V^{\gamma}_{1\beta} S^{\beta}_{23} + W^{\gamma}_{1\beta} S^{\beta}_{13} + X^{\gamma}_{1\gamma'} S^{\gamma'}_{123}$$

$$(28) \qquad S^{\gamma}_{234} \equiv U^{\gamma}_{2\alpha} S^{\alpha}_{3} + V^{\gamma}_{2\beta} S^{\beta}_{23} + W^{\gamma}_{2\beta} S^{\beta}_{13} + X^{\gamma}_{2\gamma'} S^{\gamma'}_{123}$$

$$(29) \qquad S^{\delta}_{1234} \equiv U^{\gamma}_{3\alpha} S^{\alpha}_{3} + V^{\gamma}_{3\beta} S^{\beta}_{23} + W^{\gamma}_{3\beta} S^{\beta}_{13} + X^{\gamma}_{3\gamma'} S^{\gamma'}_{123}$$

Cela étant, égalons les coefficients de $dx^3 \wedge dx^4$ dans $d\bar{\omega}^{\alpha}$ et $\bar{B}^{\alpha}_{\beta}\, \bar{\varphi}^{\beta} + \bar{C}^{\alpha}_{\alpha'} \wedge \bar{\omega}^{\alpha'}$:

$$(30) \qquad -\frac{\partial S^{\alpha}_{3}}{\partial x^4} = \bar{B}^{\alpha}_{\beta} S^{\beta}_{34} - C^{\alpha}_{\alpha',4} S^{\alpha}_{3} ,$$

puis , dans $d\bar{\varphi}^{\beta}$ et $\bar{D}^{\beta}_{\gamma}\bar{\psi}^{\gamma} + \bar{E}^{\beta}_{\beta'} \wedge \bar{\varphi}^{\beta'} + \bar{F}^{\beta}_{\alpha} \wedge \bar{\omega}^{\alpha}$,

égalons d'abord les coefficients de $dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4$:

$$(31) \qquad \frac{\partial S^{\beta}_{13}}{\partial x^4} + \frac{\partial S^{\beta}_{34}}{\partial x^1} = \bar{D}^{\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{134} + \bar{E}^{\beta}_{\beta',4} S^{\beta'}_{13} + E^{\beta}_{\beta',1} S^{\beta'}_{34}$$

ensuite les coefficients de $dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$:

$$(32) \qquad \frac{\partial S^{\beta}_{23}}{\partial x^4} + \frac{\partial S^{\beta}_{34}}{\partial x^2} = \bar{D}^{\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{234} + E^{\beta}_{\beta',4} S^{\beta'}_{23} + E^{\beta}_{\beta',2} S^{\beta'}_{34}$$

Enfin, dans $\overline{d\bar{\psi}^{\gamma}}$ et $\bar{G}^{\gamma}_{\delta}\, \bar{\theta}^{\delta} + \bar{H}^{\gamma}_{\gamma'} \wedge \bar{\psi}^{\gamma'} + \bar{J}^{\gamma}_{\beta} \wedge \bar{\varphi}^{\beta} + \bar{K}^{\gamma}_{\alpha} \wedge \bar{\omega}^{\alpha}$ égalons les coefficients de $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$;

$$(33) \qquad -\frac{\partial S^{\gamma}_{123}}{\partial x^4} - \frac{\partial S^{\gamma}_{134}}{\partial x^2} + \frac{\partial S^{\gamma}_{234}}{\partial x^1} =$$

$$\bar{G}^{\gamma}_{\delta} S^{\delta}_{1234} - H^{\gamma}_{\gamma' 2} S^{\gamma'}_{134} + H^{\gamma}_{\gamma',1} S^{\gamma'}_{234} - H^{\gamma}_{\gamma',4} S^{\gamma'}_{123}$$

Si, dans les équations (30), (31), (32), (33) on remplace les S^{β}_{34} , S^{γ}_{134}, S^{γ}_{234} , S^{δ}_{1234} par leurs valeurs tirées respectivement de (26), (27), (28), (29), on obtient des équations résolues par rapport aux dérivées partielles

$$\frac{\partial S^{\alpha}_{3}}{\partial x^4} , \quad \frac{\partial S^{\beta}_{13}}{\partial x^4} , \quad \frac{\partial S^{\beta}_{23}}{\partial x^4} , \quad \frac{\partial S^{\gamma}_{123}}{\partial x^4} .$$

dans les seconds membres desquelles figurent linéairement les fonctions S_3^α, S_{13}^β, S_{23}^β, S_{123}^γ elles-mêmes, et leurs dérivées partielles par rapport à x^1 et x^2.

Or, puisque Σ_4 se réduit à V_3 pour $x^4 = x_o^4$, ces fonctions S_3^α, S_{13}^β, S_{23}^β, S_{123}^γ, sont nulles identiquement quand on remplace x^4 par x_o^4.

Donc elles sont identiquement nulles quels que soient : x^1, x^2, x^3, x^4. Donc Σ_4 est V_4.

Par conséquent, il passe bien par V_2, au voisinage de x_o une variété intégrale à 4 dimensions. Il n'en passe qu'une.
En effet, soit W_4 une variété intégrale, répondant à toutes les conditions de l'énoncé.
L'intersection de W_4 par $x^4 = x_o^4$ est une variété intégrale qui doit vérifier le même système aux dérivées partielles que V_3, et la même condition initiale, pour $x^3 = x_o^3$. Cette intersection est, d'après le théorème de Cauchy, nécessairement confondue avec V_3.
W_4 doit vérifier le même système aux dérivées partielles que V_4, et la même condition initiale, pour $x^4 = x_o^4$. Donc W_4 coïncide nécessairement avec V_4.
Le théorème est donc démontré.

57 - DEMONSTRATION, DANS L'HYPOTHESE (b), LORSQUE s_p est NUL

La démonstration suit la même marche, dans l'hypothèse (b) (c'est-à-dire si σ_p est strictement positif) lorsque s_p est nul.

Reprenons le cas particulier $p = 4$, et les notations du n° précédent. On voit alors immédiatement que, dans le système des équations (12), (14), (15) on peut prendre pour σ_4 des variables $x^5, \ldots, x^n$ des fonctions arbitraires de x^1, x^2, x^3 (sous réserve qu'elles satisfassent aux conditions initiales).

De même, dans le système des équations (18), (20), (22), on peut prendre pour σ_4 des variables $x^5, \ldots, x^n$ des fonctions arbitraires de x^1, x^2, x^3, x^4 (toujours sous la même réserve).

On voit bien, par conséquent, que la variété intégrale la plus générale à 4 dimensions passant par V_2 dépend de

σ_4 fonctions arbitraires de 3 arguments et

σ_4 " " de 4 arguments.

CHAPITRE TROIS

SYSTEMES COMPLEMEMENT INTEGRABLES

Le but de ce chapitre est d'abord d'établir, ou de rappeler, certaines propriétés des systèmes de Pfaff complètement intégrables, en liaison avec la théorie des fonctions en involution, utiles pour la suite, lorsque nous ferons appel aux transformations de contact.

Etant donné un système différentiel fermé de degré h quelconque, nous dirons qu'il est complètement intégrable si s_h est nul (ce qui entraine la nullité des caractères suivants). Nous donnerons un exemple de résolution d'un tel système , de degré 2, à 7 variables.

PARAGRAPHE UN : SYSTEMES DE PFAFF

Soit un système de Pfaff à n variables, de caractère s_o (les caractères suivants sont nuls ipso-facto). Nous supposerons $s_o < n$. Dans le cas contraire, le système n'admettrait aucune variété intégrale.

58 - SYSTEME COMPLETEMENT INTEGRABLE

Soit S un système de Pfaff aux variables $x^1,\ldots,x^n$.

a) définition

1) Si $s_o = n-1$, le système est toujours complètement intégrable.

2) Si $s_o < n-1$, pour que le système soit complètement intégrable, il faut et il suffit qu'il soit fermé.

Si S est complètement intégrable, il est en involution par rapport à un système de $n-s_o$ variables indépendantes convenablement choisies.

b) Théorème d'existence

Posons : $p = n-s_o$; on a : $s_1 = \ldots = s_p = 0$

Il en résulte (E. Cartan, p. 77) que, par tout point régulier M_o passe une variété intégrale à p dimensions et une seule.

59 - EFFET D'UN CHANGEMENT DE VARIABLES REVERSIBLE ; SYSTEMES ALGEBRIQUEMENT EQUIVALENTS

On démontre les propositions suivantes :

a) Un changement de variables réversible quelconque transforme un système complètement intégrable en un système de même espèce.

b) Si un système est complètement intégrable, il en est de même de tout système algébriquement équivalent.

60 - INTEGRALES PREMIERES

Soit le système de Pfaff à n variables $x^1,\ldots,x^n$.

$$\omega^\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, h).$$

a) On dit que $v(x^i)$ est une intégrale première de ce système si $dv = 0$ est une conséquence algébrique de celui-ci. La forme de Pfaff dv est dite une combinaison intégrable des premiers membres du système.

b) Si le système est complètement intégrable, et s'il est de rang h , il possède h intégrales premières distinctes, $v_1,\ldots,v_h$, de sorte qu'il est équivalent à :

$$dv_1 = 0, \ldots, dv_h = 0.$$

La réciproque est évidente.

c) Nous utiliserons la propriété suivante:
Une combinaison intégrable d'un système de Pfaff se conserve dans un changement de variables quelconque. Autrement dit : mne intégrable première de l'ancien système se transforme en une intégrale première du nouveau.

61 - REDUCTION D'UN SYSTEME COMPLETEMENT INTEGRABLE

Si l'on connaît r intégrales premières distinctes d'un système de Pfaff complètement intégrable, on peut, par un changement de variables réversible, ramener sa résolution à celle d'un système complètement intégrable renfermant r variables et r équations de moins que le système donné.

Cas particulier : soit h le rang du système . Si $r = h-1$, le nouveau système ne renferme qu'une seule équation, qui est complètement intégrable.

62 - CLASSE D'UNE FORME DE PFAFF

Soit une forme de Pfaff à n variables $x^1,\ldots,x^n$:

$$\omega \equiv a_i dx^i \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

Posons : $$d\omega \equiv 1/2 \; a_{ij} dx^i \wedge dx^j \qquad (a_{ij} + a_{ji} = 0)$$
$$(j = 1,\ldots,n)$$

La classe de ω est le rang du système de Pfaff :

$$(1)\quad \begin{cases} \omega = 0 \\ a_{ij}dx^i = 0 \end{cases}$$

Propriété fondamentale : La classe est invariante par un changement de variables réversible quelconque :

Posons : $x^i = f^i(X^1 \ldots X^n)$, $\dfrac{\partial f^i}{\partial X^j} = f^i_j$ $(i,j = 1,\ldots,n)$

ω devient :

$$\Omega = a_k f^k_i \; dX^i \qquad (k = 1,\ldots,n)$$

On a (n° 39)

$$d\Omega = 1/2 \; A_{ij} \, dX^i \wedge dX^j ,$$

avec $A_{ij} = a_{kl} \, f^k_i \, f^l_j$.

La classe de Ω est le rang du système :

$$(2)\quad \begin{cases} a_k f^k_i \, dX^i = 0 \\ a_{kl} \, f^k_i \, f^l_j \, dX^i = 0 \end{cases} \qquad (i,j,k,l; = 1,\ldots,n)$$

ou du système équivalent :

$$(3)\quad \begin{cases} a_k f^k_i \, dX^i = 0 \\ a_{kl} \, f^k_i \, dX^i = 0 \end{cases}$$

Or le système (3) s'obtient en faisant dans (1) la substitution linéaire régulière :

$$dx^i = f^i_k \, dX^k .$$

Donc les systèmes (1) et (3) ont le même rang . . C.Q.F.D.

(cf. Goursat, Leçons . Problème de Pfaff, page 31).

63 - RANG D'UN SYSTEME PARTICULIER

Théorème : Si $u^1,\ldots,u^n$ sont n fonctions distinctes des 2n+1 variables $x^1,\ldots,x^{2n+1}$, le système de Pfaff

$$du^1 = 0,\ldots,du^n = 0, \qquad \omega \equiv dx^{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} x^{i+n} \, dx^i = 0$$

est de rang n+1.

Complétons l'ensemble $u^1,\ldots;u^n$ de manière à former un système de 2n+1 nouvelles variables distinctes : $u^1,\ldots,u^{2n+1}$. ω devient : $A_1du^1 + \ldots + A_{2n+1}du^{2n+1}$.

ω étant de classe 2n+1 par rapport aux anciennes variables, l'est également par rapport aux nouvelles. Donc l'un au moins des coefficients $A_{n+1}, A_{n+2},\ldots, A_{2n+1}$ n'est pas identiquement nul, car dans l'hypothèse contraire, la classe de ω serait au plus égale à 2n.

Le système $du^1=0,\ldots,du^n = 0$, $A_1du^1+\ldots+A_{2n+1}du^{2n+1} = 0$ est donc bien de rang n+1.

Il en est de même du système donné.

C.Q.F.D.

Remarque : Il découle du théorème précédent que si $u^1,\ldots,u^h$ sont h fonctions distinctes de $x^1,\ldots,x^{2n+1}$ $(1 \leq h \leq n)$, le système de Pfaff :

$$du^1 = 0,\ldots,du^h = 0, \qquad \omega = 0$$

est de rang h +1.

64 - FONCTIONS EN INVOLUTION ; TRANSFORMATIONS DE CONTACT

a) Soient u et v deux fonctions des x^i,z,p_i (i= 1,...,n). Posons :

$$\frac{du}{dx^i} = \frac{\partial u}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{, et de même pour v.}$$

Le crochet de Jacobi [u,v] est défini par :

$$[u,v] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{dv}{dx^i} - \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{du}{dx^i}\right)$$

on dit que deux fonctions u et v sont en involution si leur crochet est nul identiquement.

Remarque : Nous utiliserons aussi la notation suivante : p_i sera remplacé par x^{i+n} et z par x^{2n+1} (i = 1,...,n)

b) On dit que les formules :

$$x^i = f^i(X^1,\ldots,X^{2n+1}) \qquad (i= 1,\ldots, 2n+1).$$

définissent une transformation de contact (en abrégé : T.C.) de l'espace $x^1,\ldots,x^n$, x^{2n+1} si l'on a identiquement :

$$\Omega \equiv dX^{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} X^{i+n}\, dX^{i} \equiv \lambda\, \omega \qquad (\text{avec} \quad \lambda \not\equiv 0).$$

(sauf indication contraire, la lettre ω désigne, dans la suite, la forme de Pfaff :

$$dz - p_i dx^i \text{ ou } \quad dx^{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} x^{i+n}\, dx^{i}).$$

Une T.C. est nécessairement réversible. En effet on a :

$$\frac{D(x^1,\ldots,x^{2n+1})}{D(X^1,\ldots,X^{2n+1})} = \pm \lambda^{n+1} \qquad (1)$$

Remarque : on sait qu'une transformation ponctuelle réversible

$$x^j = f^j\,(X^1 \ldots X^{2n+1}) \qquad (j = 1,\ldots,n,\ 2n+1)$$

est généralement prolongeable en une T.C.

b) Involution et transformation de contact.

Soient u et v deux fonctions des x^i, z, p_i , et U , V ce qu'elles deviennent quand on remplace ces lettres par leurs expressions au moyen des X^i, Z, P_i , dans une T.C. donnée, pour laquelle :

$$dZ - P_i\, dX^i \equiv \lambda\,(dz - p_i\, dx^i)\ .$$

On démontre qu'on a :

$$[u,v]_x = \lambda\, [U,V]_X,$$

l'indice X rappelant que le second crochet est calculé en considérant U et V comme fonctions des X^i, Z, P_i.

cf. Cerf, Transformations de contact et problème de Pfaff, p. 24 ; E. Goursat Equations aux d.p. du 1er ordre, p. 380.

65 - SYSTEME COMPLETEMENT INTEGRABLE PARTICULIER

Théorème : Si $u^1,\ldots,u^n$ sont n fonctions distinctes des x^k $(k = 1,\ldots, 2n+1)$ deux à deux en involution, le système de Pfaff :

$$du^i = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n) \qquad \omega \equiv dx^{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} x^{i+n} dx^{i} = 0$$

est complètement intégrable.

---

(1) Equations aux d.p. du 1er ordre, E. Goursat , p.374.

(on sait déjà que ce système est de rang n+1, cf. n° 63).

Les crochets $[u^i, u^j]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ étant identiquement nuls, on peut trouver une fonction u^{2n+1} telle que :

$$[u^i\ u^{2n+1}] \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(Goursat : Leçons 1er ordre p. 289).

Connaissant u^{2n+1}, on peut ensuite trouver n autres fonctions $u^{n+1}, \ldots, u^{2n}$ telles que :

$$du^{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} u^{i+n}\, du^i \equiv \lambda . \omega \qquad (\lambda \not\equiv 0).$$

(Goursat : op.cit. p.376)

Prenons comme nouvelles variables les fonctions distinctes $u^1, \ldots, u^{2n+1}$.

Le nouveau système de Pfaff se réduit à :

$$du^1 = \ldots = du^n = du^{2n+1} = 0,$$

qui est évidemment complètement intégrable.

Il en est de même du système initial.

C.Q.F.D.

PARAGRAPHE DEUX : SYSTEMES DE DEGRE SUPERIEUR A 1.

Soit S un système différentiel extérieur à n variables, de degré h quelconque, de caractères d_i, s_i. Nous supposerons : $d_{h-1} > h-1$.

Dans le cas contraire, le système serait au plus du genre h-1. Les variétés intégrales ordinaires seraient au plus à h-1 dimensions. Donc on pourrait supprimer, dans le système, au moins les équations de degré h, vérifiées ipsofacto, sur une telle variété.

66 - SYSTEME COMPLETEMENT INTEGRABLE

Pour un système de degré h, nous dirons qu'il est complètement intégrable.

a) Lorsque $d_{h-1} = h$, et que le système est presque fermé ;
b) Si $d_{h-1} > h$, lorsque s_h est nul, et que le système est fermé.

Notons que l'égalité $d_{h-1} = h$ entraine la nullité de s_h. En effet, comme $d_{h-1} > h-1$, on a : $d_h \geqslant h$. Mais, d'après la non-croissance des d_i : $d_h \leqslant h$. Donc $d_h = h = d_{h-1}$, et par conséquent : $s_h = 0$.

On voit aisément que le genre g d'un tel système est, en toute hypothèse égal à d_{h-1}.

Ce genre étant au moins égal à h, on a , de toutes façons : $s_g = 0$

Remarque : Ces définitions sont encore valables pour les systèmes de Pfaff (h= 1). Un tel système est toujours presque fermé, et s_1 est toujours nul. Remarquons que, pour un système de Pfaff, l'égalité $d_0 = 1$ [illegible] que le système est fermé.

67 - EFFET D'UN CHANGEMENT DE VARIABLES SUR LES SYSTEMES ALGEBRIQUEMENT EQUIVALENTS

On démontre les propriétés suivantes :

a) un changement de variables réversible quelconque transforme un système complètement intégrable en un système de même espèce. (conséquence de l'invariance des caractères et du degré).

b) Tout système algébriquement équivalent à un système complètement intégrable, et de même degré, est complètement intégrable (invariance des caractères ; il faut supposer que le degré ne change pas).

68 69 - THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE

Soit un système complètement intégrable ,de degré h, de genre g.

A) Involution :

Il existe au moins un système de g variables indépendantes par rapport auxquelles le système est en involutinn.

En effet, si $d_{h-1} = h$, le système est presque fermé, et son genre et son degré sont égaux au nombre de variables indépendantes.

Si $d_{h-1} > h$, le système est fermé, et le genre est égal au nombre de variables indépendantes.

B) Variété intégrable régulière.

Soit k le plus grand entier inférieur ou égal à h tel que $s_{k-1} \neq 0$. Une variété intégrale à k-1 dimensions sera dite régulière en un point M_o si elle est tangente en ce point à un élément intégral régulier à k-1 dimensions.

C) Théorème d'existence et d'unicité .

Soit V_{k-1} une variété intégrale à k-1 dimensions, passant en M_o, et régulière en ce point. Il existe, au voisinage de M_o, une variété intégrale à g dimensions et une seule, contenant V_{k-1}.

En effet, distinguons 2 cas :

a) $d_{h-1} - g = h$. Le théorème ci-dessus est alors une application immédiate du théorème du n° 54 (a).

b) $d_{h-1} = g > h$. Posons : $\sigma_g = d_{g-1} - g$.
Le genre étant égal à d_{h-1}, tous les d_i d'indice supérieur ou égal à h-1 sont égaux à d_{h-1}.
Or $g > h$. Donc $d_{g-1} = d_{h-1} = g$. Donc : $\sigma_g = 0$.
On se trouve dans les conditions d'application d'un théorème d'existence énoncé par E. Cartan pour les systèmes fermés. ("Systèmes différentiels extérieurs", p.77, n° 71).

70 - EXEMPLE DE SYSTEME COMPLETEMENT INTEGRABLE

Considérons le système :

$$\omega_1 \equiv x_2(x_3 + x_4)dx_1 + x_1(x_2^2 - x_3 - x_4)\, dx_2 + x_2^2(dx_4 + dx_6) = 0$$

$$\omega_2 \equiv (x_5 + x_7)(dx_3 + dx_4) + x_6 dx_5 + x_5\, dx_6 = 0$$

$$\varphi_1 \equiv (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \wedge (dx_3 + dx_4) + x_2^2\, dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

$$\varphi_2 \equiv (dx_3 + dx_4) \wedge (dx_5 + dx_7) = 0.$$

Les différentielles extérieures de φ_1 et φ_2 sont identiquement nulles Celles de ω_1 et ω_2 s'expriment au moyen de φ_1 et φ_2. Le système est donc fermé.

Nous avons précédemment calculé ses caractères (n° 30) et trouvé : $s_o = 2$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$.

Le système est donc complètement intégrable. Son genre est égal à 3. Il admet, nous l'avons constaté, un élément intégral à 3 dimensions, normal pour les variables x_1, x_2, x_3.
Ilest donc en involution par rapport à ces variables indépendantes.
Résolvons-le, en suivant la méthode même utilisée pour démontrer le théorème d'existence.

a) Recherche d'une variété intégrale V_1, rapportée à la variable indépendante x_1, et sur laquelle $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Le système à résoudre est :

$$d(x_4 + x_6) + x_4\, dx_1 = 0$$

$$d(x_5\, x_6) + (x_5 + x_7)\, dx_4 = 0.$$

dont la solution générale est :

$$x_4 = f'(x_1)$$

$$x_6 = -f-f'$$

$$x_5 + x_7 = \frac{g'(x_1)}{f''(x_1)}$$

$$x_5\, x_6 = -g(x_1) \ ,$$

f et g désignant deux fonctions arbitraires.

b) Recherche d'une variété intégrale V_2, rapportée à x_1 et x_2, se réduisant à V_1 pour $x_2 = 1$, et sur laquelle : $x_3 = 0$.

Le système à résoudre est :

$$(1) \qquad \frac{\partial(x_4+x_6)}{\partial x_2} - \frac{x_1\, x_4}{x_2^2} + x_1 = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial(x_5 x_6)}{\partial x_2} + (x_5 + x_7)\frac{\partial x_4}{\partial x_2} = 0$$

$$(3) \qquad -x_2 \frac{\partial x_4}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial x_4}{\partial x_1} + x_2^2 = 0$$

$$(4) \qquad \frac{\partial x_5}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_5}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} + \frac{\partial x_7}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_7}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} = 0$$

Le système caractéristique de (3) est :

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_4}{x_2^2} \ .$$

D'où la solution générale de cette équation

$$x_4 = \frac{1}{2}\, x_2^2 + \varphi'\left(\frac{x_1}{x_2}\right) ,$$

où φ' est la dérivée d'une fonction arbitraire .

L'équation (1) devient :

$$x_2 - \frac{x_1}{x_2^2}\,\varphi'' + \frac{\partial x_6}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} - \frac{x_1}{x_2^2}\,\varphi' = 0$$

$$\frac{\partial x_6}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_2^2}\,(\varphi''+\varphi') - \frac{x_1}{2} - x_2$$

D'où

$$x_6 = -(\varphi + \varphi') - \frac{x_1 x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + \theta\,(x_1)$$

où θ est arbitraire.

L'équation (4) devient :

$$\frac{\partial(x_5+x_7)}{\partial x_1} \cdot \left(x_2 - \frac{x_1}{x_2^2}\varphi''\right) - \frac{\partial(x_5+x_7)}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{x_2}\varphi'' = 0$$

Le système caractéristique :

$$\frac{dx_1}{x_2 - \frac{x_1}{x_2^2}\varphi''} = \frac{dx_2}{(-1/x_2)\varphi''} = \frac{d(x_5+x_7)}{0}$$

admet les intégrales premières :

$$x_5+x_7 \quad ; \qquad \frac{x_2^2}{2} + \varphi' \quad .$$

D'où la solution générale de (4)

$$x_5 + x_7 = \psi'(x_2^2 + 2\varphi')$$

où ψ' est la dérivée d'une fonction arbitraire.

L'équation (2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(x_5x_6) + 1/2 \quad \psi' \quad (x_2^2 + 2\varphi') . \left(2x_2 - \frac{2x_1}{x_2^2}\varphi''\right) = 0,$$

qui donne :

$$x_5x_6 = -1/2 \quad \psi \quad (2\varphi' + x_2^2) + \mu(x_1)$$

où $\mu(x_1)$ est une fonction arbitraire.

D'où finalement, la solution générale de (1),(2), (3), (4) :

$$x_4 = \frac{x_2^2}{2} + \varphi'\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$x_6 = -\varphi - \varphi' - \frac{x_1 x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + \theta(x_1)$$

$$x_5x_6 = -1/2 \quad \psi \quad (2\varphi' \div x_2^2) + \mu(x_1)$$

$$x_5 + x_7 = \psi'(x_2^2 + 2\varphi').$$

Pour satisfaire à la condition initiale il faut qu'on ait :

$$1/2 + \varphi'(u) \equiv f'(u)$$

$$-\varphi - \varphi' - u/2 - 1/2 + \theta(u) \equiv -f-f'$$

$$-1/2 \ \psi \ (2\varphi' + 1) + \mu(u) \equiv -g(u)$$

$$\psi'(1 + 2\varphi') \equiv g'/f''.$$

Supposons que la résolution de : $2f'(u) = v$ donne : $u = \lambda(v)$. Posons : $g[\lambda(u)] \equiv h(u)$.

On vérifie que l'on satisfait aux conditions ci-dessus en prenant :

$$\varphi \equiv f - u/2 , \quad \psi \equiv 2h(u) \quad , \quad \theta \equiv 0 , \quad \mu \equiv 0 .$$

Mais comme les fonctions f et g sont arbitraires, on peut conserver φ et ψ , en se bornant à remplacer θ et μ par zéro.

Pour simplifier les coefficients, on introduira , à la place de ψ , la fonction ψ_1 définie par : $\psi(2u) \equiv 2\psi_1(u)$. Cela fait, on supprimera, pour simplifier l'écriture, l'indice de ψ_1.

Il vient, pour équations de V_2 :

$$x_4 = \frac{x_2^2}{2} + \varphi'(x_1/x_2)$$

$$x_6 = - \varphi(x_1/x_2) - \varphi' - \frac{x_1 x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2}$$

$$x_5 x_6 = - \psi(x_4)$$

$$x_5 x_7 = \psi'(x_4)$$

c) Recherche de V_3, variété intégrale, rapportée à x_1, x_2, x_3 , se réduisant à V_2 , pour $x_3 = 0$.

Le système à résoudre est :

$$\frac{\partial(x_4+x_6)}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial(x_5 x_6)}{\partial x_3} + (x_5+x_7)\frac{\partial x_4}{\partial x_3} + x_5 + x_7 = 0$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_3} = -1 \qquad \frac{\partial(x_5+x_7)}{\partial x_3} = 0,$$

dont la solution générale est :

$$x_4 + x_6 = F(x_1,x_2)$$

$$x_4 = -x_3 + G(x_1,x_2)$$

$$x_5x_6 = H(x_1,x_2)$$

$$x_5 + x_7 = K(x_1,x_2)$$

F,G,H, et K étant quatre fonctions arbitraires de x_1 et x_2.
Il faut les choisir de manière que la variété précédente se réduise à V_2 pour $x_3 = 0$.
Il suffit de prendre :

$$F \equiv -\varphi(x_1/x_2) - \frac{x_1x_2}{2}, \qquad G \equiv \frac{x_2^2}{2} + \varphi'$$

$$H \equiv -\psi\left(\frac{x_2^2}{2} + \varphi'\right), \qquad K \equiv \psi'\left(\frac{x_2^2}{2} + \varphi'\right)$$

D'où les équations de V_3, solution générale du système donné :

$$x_4 = -x_3 + \frac{x_2^2}{2} + \varphi'\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$x_6 = x_3 - \varphi - \varphi' - \frac{x_1x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2}$$

$$x_5x_6 = -\psi(x_3 + x_4)$$

$$x_5 + x_7 = \psi'(x_3 + x_4),$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires d'un argument .

71 - CAS PARTICULIER D'UNE SEULE EQUATION QUADRATIQUE

Soit une équation quadratique complètement intégrable :

$$\omega \equiv 1/2\, A_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = 0 \qquad (i,j = 1,\dots,n).$$

Nous allons voir qu'elle est de classe 2 (en supposant le premier membre non identiquement nul). Rappelons la définition de la classe[1]

(1) cf. E.Goursat Leçons sur le problème de Pfaff, n°36, pge 141.
E.Cartan Systèmes différentiels extérieurs p. 52.

Posons : $d\omega \equiv \frac{1}{6} A_{ijk}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$,

et supposons $A_{12} \neq 0$

La classe de l'équation $\omega = 0$ est le rang du système de Pfaff suivant (système caractéristique) :

$$(1) \quad \begin{cases} A_{ij} dx^j = 0 \\ \begin{vmatrix} A_{12} & A_{ij} \\ A_{12k} & A_{ijk} \end{vmatrix} dx^k = 0 \end{cases}$$

$(i,j,k, = 1,\ldots,n)$

On vérifie d'ailleurs que, si l'équation $\omega = 0$ est fermée (comme nous le supposons), le système (1) se réduit aux équations

$$A_{ij}\, dx^j = 0.$$

Nous allons voir que le rang de ce système est égal à 2, si s_2 est nul. En effet posons : $\theta \equiv A_{ij} u^i dx^j$, $\psi \equiv A_{ij} v^i dx^j$, D_{kl} = déterminant des coefficients de dx^k, dx^l dans θ, ψ . L'hypothèse $s_2 = 0$, entraine qu'il existe des coefficients H_{kl}, fonctions des x^i, tels que l'on ait l'identité :

$$D_{kl} \equiv H_{kl}\, A_{ij}\, u^i v^j$$

Or :

$$D_{kl} = \begin{vmatrix} A_{ik}\, u^i & A_{il}\, u^i \\ A_{jk}\, v^j & A_{jl}\, v^j \end{vmatrix} =$$

$$(A_{ik}A_{jl} - A_{il}\, A_{jk})\, u^i v^j$$

Donc $A_{ik}A_{jl} - A_{il}\, A_{jk} = H_{kl}\, A_{ij}$, quels que soient i et j, pour k et l donnés .

Faisons $i = k$, $j = l$. Il vient :

$$H_{kl} = A_{kl}.$$

On a donc :

$$A_{ik}\, A_{jl} + A_{il}\, A_{kj} + A_{ij}\, A_{lk} = 0$$

Or :

$$\begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ij} & A_{il} \\ A_{ji} & A_{jj} & A_{jl} \\ A_{ki} & A_{kj} & A_{kl} \end{vmatrix} = A_{ij}(A_{ij}A_{kl} - A_{il}A_{kj}) + A_{ij}\, A_{ki}\, A_{jl}$$

$$= A_{ij}\,(A_{ij}A_{kl} + A_{ki}\, A_{jl} + A_{il}\, A_{jk}) = 0$$

Mais $A_{12} \neq 0$. Prenons $i=1$, $j=2$, On voit immédiatement que le tableau d'élément général A_{ij} est de rang 2. Donc l'équation $\omega = 0$ est bien de classe 2.
Soient u et v deux intégrales premières distinctes du système caractéristique (toujours complètement intégrable, comme on le sait). L'équation $\omega = 0$ est algébriquement équivalente à : $du \wedge dv = 0$, (Cartan, p.52). dont la solution générale est évidente :

$$v = f(u) ,$$

f étant une fonction arbitraire.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

DEUXIEME PARTIE

EQUATIONS DE MONGE-AMPERE A n VARIABLES

CHAPITRE I

DEFINITION DES EQUATIONS DE MONGE-AMPERE

SYSTEMES CARACTERISTIQUES

Les équations considérées, ici et dans la suite, sont des équations analytiques aux dérivées partielles du second ordre, à une fonction inconnue, z, de n variables indépendantes: $x^1,\ldots,x^n$. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = p_i \ , \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} = p_{ij} \ ,$$

mais il nous arrivera aussi souvent d'écrire : $x^{n+1},\ldots,x^{2n}$, x^{2n+1} à la place de : $p_1,\ldots,p_n$, z respectivement .

Nous poserons généralement : $\omega \equiv dz - p_i dx^i$.

Le but du chapitre est d'abord de rappeler ou de démontrer les propriétés fondamentales des équations du type de Monge-Ampère, qu'elles soient ou non de la première forme (1) .

Ensuite, de donner les conditions explicites pour qu'une équation (L), à 3 variables, soit du type de Monge-Ampère.

---

(1) L'essentiel se trouve dans un mémoire de M. Goursat, publié en 1899,(Bulletin de la Soc. Math. de France).

PARAGRAPHE 1 - EQUATIONS (L)

72- DEFINITION D'UNE EQUATION (L)

Une équation aux dérivées partielles du second ordre, à une fonction inconnue, z, de n variables indépendantes : $x^1,\dots,x^n$, sera dite du type (L) si le premier membre (en supposant le second réduit à zéro) est linéaire par rapport aux déterminants de tous ordres extraits de la matrice symétrique d'élément général p_{ij} .

Nous poserons , $i_1,\dots,i_c$ et $j_1,\dots,j_c$ désignant deux séries de c entiers $(0 < c \leq n)$ choisis parmi les n premiers.

$$\begin{vmatrix} p_{i_1 j_1} & \cdots\cdots\cdots & p_{i_1 j_c} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{i_c j_1} & \cdots\cdots\cdots & p_{i_c j_c} \end{vmatrix} = p_{i_1 \dots i_c}^{j_1 \dots j_c} \quad .$$

On a , par raison de symétrie : $p_{i_1 \dots i_c}^{j_1 \dots j_c} = p_{j_1 \dots j_c}^{i_1 \dots i_c}$.

Le nombre des déterminants $p_{i_1 \dots i_c}^{j_1 \dots j_c}$ distincts, pour c donné, est[1]

$$N_c = \frac{1}{2} C_n^c (C_n^c + 1) .$$

La notation $B_{j_1 \dots j_c}^{i_1 \dots i_c}$ désignant des coefficients antisymétriques par rapport à chacune des deux séries d'indices, inférieurs et supérieurs, et tels que, par définition :

$$B_{j_1 \dots j_c}^{i_1 \dots i_c} = B_{i_1 \dots i_c}^{j_1 \dots j_c} \quad ,$$

---

(1) C_n^c désignant les coefficients de binôme.

il est clair que toute équation du type (L) peut se mettre sous la forme[1] :

$$L \equiv A\, p^{1\ldots n}_{1\ldots n} + \frac{1}{[(n-1)!]^2}\, B^{i_1\ldots i_{n-1}}_{j_1\ldots j_{n-1}}\, p^{j_1\ldots j_{n-1}}_{i_1\ldots i_{n-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(c!)^2}\, B^{i_1\ldots i_c}_{j_1\ldots j_c}\, p^{j_1\ldots j_c}_{i_1\ldots i_c} + \ldots + B^i_j\, p^j_i + C = 0,$$

les coefficients A, C et $B^{i_1\ldots i_c}_{j_1\ldots j_c}$ étant des fonctions de $x^1,\ldots,x^n$, $p_1,\ldots,p_n,z$.
(tous les indices varient de 1 à n).

Nous dirons qu'une équation (L) est de la première forme si le coefficient A est différent de zéro.

73-74-75 - PROPRIETES DES EQUATIONS (L)

A) Une équation (L) peut être remplacée par un système différentiel extérieur :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \varphi \equiv \frac{1}{n!}\, A_{i_1\ldots i_n}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} = 0 \end{cases}$$

$(i_1,\ldots,i_n = 1, \ldots, 2n)$, aux variables indépendantes $x^1,\ldots,x^n$. Il est à remarquer que le choix de la forme φ n'est pas unique[2]

Inversement, un système différentiel extérieur quelconque, de la forme précédente, remplace une équation (L).

---

(1) Il est intéressant de remarquer que l'expression d'une équation (L) n'est pas unique si n est supérieur à 3. En effet le nombre N_c devient alors, pour certaines valeurs de c, supérieur au nombre des variables p_{ij} distinctes ; c'est-à-dire à $\frac{n(n+1)}{2}$. Les mineurs correspondants de la matrice d'élément général p_{ij} sont liés par des relations (de Kronecker) ; d'où résulte la remarque ci-dessus.

---

(2) Par exemple pour n = 2, l'équation s=o peut être remplacée par l'un des systèmes :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ dp \wedge dx = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ dq \wedge dy = 0 \end{cases}$$

B) La transformée d'une équation (L) par une transformation de contact est une équation (L). Cette assertion se vérifie aisément en recourant au système différentiel extérieur remplaçant l'équation (L) considérée.

C) Toute équation (L) non dégénérée peut être ramenée à la première forme par une transformation de contact.

Nous dirons qu'une équation (L) n'est pas dégénérée si elle est effectivement du second ordre.

Pour la démonstration de la propriété annoncée, cf. E. Goursat mémoire 1899, page 10.

76 - CARACTERES DU SYSTEME PRESQUE FERME REMPLACANT UNE EQUATION (L) NON DEGENEREE

Soit une équation (L) , non dégénérée, remplacée par le système presque fermé :

$$(1) \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ d\omega = 0 \\ \varphi \equiv \frac{1}{n!} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_n} = 0 \end{cases}$$

$(\alpha_1 \ldots, \alpha_n = 1, \ldots, 2n)$.

aux variables indépendantes $x^1, \ldots, x^n$.

Une transformation de contact, nécessairement réversible, laisse les caractères invariants. On peut toujours, par une telle transformation, se ramener à un système pour lequel le coefficient $C_{n+1,n+2,\ldots,2n}$ n'est pas nul (équation de la première forme).

Dans ce cas, les caractères du système (1) ont été calculés précédemment (n° 31).

On a trouvé :

$$s_o = 1, \quad s_1 = 1, \ldots, s_{n-2} = 1, \quad s_{n-1} = 2 .$$

D'où

$$s_o + \ldots + s_{n-1} = n+1 = 2n+1 - n \quad ,$$

ce qui entraine :

$$s_n = 0.$$

Le genre est égal à n .

77 - THEOREME D'EXISTENCE, POUR UNE EQUATION (L) de la PREMIERE FORME

Reprenons les notations du n° précédent, en supposant maintenant (L) de la première forme .

Il existe donc un élément intégral à n dimensions, normal pour les variables $x^1,\ldots,x^n$.

Dès lors le système (1) , presque fermé, étant de genre et de degré n, est en involution pour les variables indépendantes $x^1,\ldots,x^n$.

Ici, s_n et σ_n sont nuls (cf. n°55).

Le théorème d'existence du n°55 s'applique immédiatement : par toute variété intégrale à n-1 dimensions, régulière au voisinage de M_o, il passe une variété intégrale à n dimensions et une seule.

La recherche des variétés intégrales à n-1 dimensions n'exige aucune intégration.

Pour le voir , posons :

$$\omega \equiv A_i dx^i$$

$$d\omega \equiv \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

$(i= 1,\ldots,2n+1 \; ; \; \alpha , \beta = 1, \ldots, 2n)$.

Donnons-nous un élément intégral régulier à n-1 dimensions , $\vec{a}_1,\ldots, \vec{a}_{n-1}$, d'origine M_o (x_o^i) , et de composantes $a_1^i\ldots,a_{n-1}^i$, telles que : $a_\lambda^\gamma = \delta_\lambda^\gamma$ (Kronecker ; ici, et dans la suite du numéro , $\gamma , \lambda = 1, \ldots, n-1$).

Le seul problème qui reste à résoudre est la recherche d'une variété intégrale à n-1 dimensions , V_{n-1} , contenant l'élément intégral régulier précédent. V_{n-1} sera rapportée aux variables $x^1,\ldots x^{n-1}$.

Il suffit de se donner 3 fonctions arbitraires de $x^1,\dots,x^{n-1}$; f^n, f^{2n}, f^{2n+1} , vérifiant les conditions suivantes :

$$f^k(x_o^1,\dots,x_o^{n-1}) = x_o^k \quad ; \qquad (k = n\ ,\ 2n,\ 2n+1)$$

de plus, en posant : $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^\gamma} = f^k_\gamma$;

$$(f^k_\gamma)_o = a^k_\gamma \quad ;$$

(dérivée partielle calculée au point $x_o^1,\dots, x_o^{n-1}$)

enfin , en posant : $\dfrac{\partial^2 f^k}{\partial x^\gamma\ \partial x^\lambda} = f^k_{\gamma\lambda}$:

$$(1) \qquad (f^{2n+1}_{\gamma\lambda})_o = a_\lambda^{\gamma+n} + a_\lambda^{2n}\ a_\gamma^n + x_o^{2n}\ (f^n_{\gamma\lambda})_o$$

Remarquons que les $(n-1)^2$ relations (1) sont compatibles , c'est-à-dire qu'on a, en échangeant γ et λ :

$$(2) \qquad a_\lambda^{\gamma+n} + a_\lambda^{2n}\ a_\gamma^n = a_\gamma^{\lambda+n} + a_\gamma^{2n}\ a_\lambda^n \ .$$

En effet , par hypothèse :

$$B_{\alpha\beta}\ a_\gamma^\alpha\ a_\lambda^\beta = 0 \qquad (\alpha,\beta = 1,\dots, 2n).$$

ce qui se réduit à la relation (2), comme on le voit aisément . Enfin posons :

$$f^{\gamma+n} = -f^{2n}\ f_\gamma^n + f_\gamma^{2n+1} \ .$$

On démontre que la variété V_{n-1} définie par :

$$x^j = f^j \qquad (j = n,\dots,2n+1)$$

est bien une intégrale à n-1 dimensions, passant par le point (x_o^i), et régulière en ce point.

Elle remplit donc toutes les conditions voulues . Remarquons que la variété intégrale générale à n dimensions passant par un point régulier donné (x_o^i) dépend de 2 fonctions arbitraires de n-1 arguments, à savoir les fonctions de $x^1,\ldots,x^{n-1}$, à quoi x^{2n} et x^{2n+1} se réduisent quand on fait $x^n = x_o^n$ (1).

-=-=-=-=-=-=-=-=-

PARAGRAPHE DEUX : EQUATIONS DE MONGE-AMPERE

78 - DEFINITION D'UNE EQUATION DE MONGE-AMPERE

Nous dirons qu'une équation (L) non dégénérée, aux variables indépendantes $x^1,\ldots,x^n$, est une équation de Monge-Ampère si elle est susceptible d'être remplacée par un système différentiel extérieur, aux mêmes variables indépendantes, de la forme :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n = 0 \end{cases}$$

où $\theta_1,\ldots,\theta_n$ représentent n formes de Pfaff distinctes en les 2n+1 différentielles dx^i, dz (i= 1, ...,2n) , dont les coefficients sont des fonctions des x^i,z.

Une équation de Monge-Ampère (en abrégé : M.A.) est dite de la première forme si le coefficient A de $p^{1\ldots n}_{1\ldots n}$ est différent de zéro (notation du n° 72).

Remarques : 1) On peut toujours supposer que les θ_i ne contiennent pas la différentielle dz. En effet, dans le cas contraire, on posera :

$$\theta_\alpha = \psi_\alpha + A_\alpha \cdot \omega \qquad (\alpha = 1,\ldots,n)$$

ψ_α étant une forme linéaire en les 2n différentielles dx^i, et A_α un coefficient , fonction des x^i et de z.

(1) Bien que la fonction $f^n(x^1,\ldots,x^{n-1})$ soit quelconque, elle ne compte pas comme fonction arbitraire. Remarque analogue à celle que l'on fait dans le cas d'une équation aux dérivées partielles du 1er ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes.

Le système différentiel extérieur :

$$\omega = 0 \ , \quad \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n = 0 \ ,$$

étant équivalent (n°44) à :

$$\omega = 0 \ , \quad \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n = 0$$

remplace la même équation, aux dérivées partielles.

2) Une équation (L) n'est pas toujours du type de M.A., sauf si n = 2. Dès que n est supérieur à 2, il y a des conditions (que nous expliciterons dans le cas n=3) pour qu'une équation (L) soit du type de M.A.[1].

79 - SYSTEMES CARACTERISTIQUES

Si une équation de M.A. peut être remplacée par le système différentiel extérieur :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n = 0 \ , \end{cases}$$

le système de Pfaff :

$$(1) \qquad \omega = 0, \quad \theta_1 = 0, \ldots, \theta_n = 0$$

est dit un système caractéristique de cette équation .

Remarques : 1) Il est clair que si le premier membre de l'équation de M.A. n'est pas identiquement nul, tout système caractéristique est de rang n+1 ,en les différentielles dx^i,dz.

2) On vérifie sans peine que tout système de Pfaff :

$$\omega = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$$

algébriquement équivalent à (1) est un système caractéristique de l'équation de M.A.

Nous ne considérerons pas comme distincts deux systèmes de Pfaff algébriquement équivalents .

---

(1) Voir à ce sujet, les travaux de M. Lepage, en particulier : mémoire A (1930).

3) Si l'équation de M.A. est de la première forme, il est clair que le déterminant des coefficients de $dp_1,\ldots,dp_n$ dans $\theta_1,\ldots,\theta_n$ est différent de zéro.

Réciproquement cette condition entraine que l'équation est de la première forme.

On peut donc toujours supposer que, pour une telle équation, le système caractéristique est résolu par rapport à dz, $dp_1,\ldots,dp_n$.

80 - SYSTEMES CARACTERISTIQUES D'UNE EQUATION DE M.A. DE LA PREMIERE FORME

On démontre la proposition suivante :

Une équation de Monge-Ampère de la première forme admet au plus deux systèmes caractéristiques distincts.(cf. E. Goursat, Mémoire 1899, page 3.)

81 - EFFET D'UNE T.C. SUR UNE EQUATION DE MONGE - AMPERE

On démontre les théorèmes suivants :

1 - Par une transformation de contact quelconque, une équation de M.A. et l'un de ses systèmes caractéristiques sont changés en une équation de M.A. et l'un de ses systèmes caractéristiques.

(cf. E. Goursat, mémoire 1899, page 11 - M. Lepage, mémoire An°1 , mémoire B, n° 7, page 171).

2 - A deux systèmes caractéristiques distincts de l'équation de M.A. initiale correspondent deux systèmes caractéristiques distincts de l'équation transformée.

Il suffit d'observer qu'une T.C. induit sur les différentielles des x^i et de z une substitution linéaire régulière.

82 - SYSTEMES CARACTERISTIQUES D'UNE EQUATION DE M.A. QUELCONQUE

Comme on peut toujours ramener, par une T.C., une équation de M.A. quelconque à la première forme, qu'une équation de la première forme admet au plus deux systèmes caractéristiques distincts, et qu'une T.C. conserve le nombre des systèmes caractéristiques distincts, il est clair

qu'une équation de M.A. quelconque admet au plus deux systèmes caractéristiques distincts.

Nous allons maintenant établir une relation entre le rang d'un système caractéristique par rapport aux dp_i et le degré de l'équation de M.A. par rapport aux dérivées du second ordre.

Nous avons besoin, pour cela, du lemme suivant :

82 bis - LEMME ALGEBRIQUE

Soit un tableau X d'élément général x_i^j $(i,j = 1,\dots,n)$. Identifions x_i^j et x_j^i, quels que soient i et j, et considérons les $\frac{n(n+1)}{2}$ variables x_i^j distinctes comme autant de variables indépendantes.

p étant un entier inférieur ou égal à n, soit $x^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p}$ le déterminant empruntant ses éléments aux lignes $j_1,\dots,j_p$ et aux colonnes $i_1\dots i_p$ de X, prises dans l'ordre indiqué.

L'expression à coefficients constants antisymétriques $a_{i_1\dots i_p}$ et $b^{j_1\dots j_p}$:

$$\Phi \equiv \frac{1}{(p!)^2}\, a_{i_1\dots i_p}\, b^{j_1\dots j_p}\, x^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p} ,$$

considérée comme un polynôme en les x_i^j, ne peut être identiquement nulle que si tous les $a_{i_1\dots i_p}$ ou tous les $b^{j_1\dots j_p}$ sont nuls.

Avant d'arriver à la démonstration, faisons deux remarques sur les déterminants extraits de X.

Première remarque : sur les déterminants symétriques extraits de X

Considérons un déterminant symétrique $\Delta = x^{\alpha_1\dots\alpha_h}_{\alpha_1\dots\alpha_h}$ $(\alpha_1 < \dots < \alpha_h)$ extrait de X. Nous allons voir qu'il n'y a, dans Δ, aucune suppression de terme. Les termes semblables, s'il y en a, s'ajoutent, mais ne se détruisent pas. Nous prendrons, pour fixer les idées,

$\Delta = x^{1\ldots h}_{1\ldots h}$ (et $h = 4$) .

a) Considérons d'abord un terme $\xi = x_1^{\alpha_1} \ldots x_h^{\alpha_h}$ tel que $\alpha_j \neq j$ ($j = 1, \ldots, h$) . Nous allons voir que le seul terme semblable à ξ , dans Δ , est celui obtenu en renversant tous les facteurs de ξ (c'est-à-dire en permutant les indices de chacun d'eux). Pour cela, supposons que l'on ait un terme semblable, de la forme :

$\xi' = x_1^{\alpha_1} \quad x_2^{\beta} \quad x_3^{\gamma} \quad x_4^{\delta}$. α_1 est égal à l'un des entiers 2,3,ou 4. Si les 3 derniers facteurs de ξ étaient renversés dans ξ' , on verrait apparaître , dans ξ' , deux fois le même indice en position supérieure, ce qui est impossible. Donc l'un au moins des facteurs $x_2^{\alpha_2}$, $x_3^{\alpha_3}$, $x_4^{\alpha_4}$ n'est pas renversé dans ξ' . Supposons que ce soit $x_2^{\alpha_2}$. L'un au moins des entiers α_1 ou α_2 est égal à 3 ou 4. Si les deux derniers facteurs de ξ étaient renversés dans ξ' , ce terme contiendrait deux fois le même indice en position supérieure, ce qui est impossible, etc...

On voit ainsi, en raisonnant de proche en proche, que ξ' n'est autre que ξ , ce qui montre que, s'il y a dans Δ un terme semblable à ξ , ce ne peut être que celui obtenu en renversant tous les facteurs de ξ .

Or ce terme existe effectivement : $\eta = x^1_{\alpha_1} \ldots x^h_{\alpha_h}$.

Dérangeons l'ordre des facteurs , de manière à faire apparaître, en position inférieure, la suite naturelle des entiers :

$$\eta = x_1^{\alpha'_1} \quad \ldots \quad x_h^{\alpha'_h}$$

On vérifie que les deux permutations $\alpha_1 \ldots \alpha_h$ et $\alpha'_1 \ldots \alpha'_h$ sont de la même classe.

Donc, dans Δ , les termes ξ et η sont affectés du même signe. Ils s'ajoutent, et ne se détruisent pas.

b) Considérons maintenant un terme $\xi_1 = x_1^{\alpha_1} \ldots x_h^{\alpha_h}$ tel que, pour certaines valeurs de j, on ait : $\alpha_j = j$. En mettant à part les facteurs pour lesquels cette égalité à lieu, on voit qu'on ne peut obtenir un terme semblable à ξ_1 qu'en renversant tous les autres facteurs , ou

ce qui revient au même, en renversant tous les facteurs de $\mathfrak{J}_1$, comme au a).

La proposition est donc démontrée.

Deuxième remarque, sur les déterminants quelconques extraits de X.

Considérons un déterminant quelconque : $\Delta = x^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$

$(i_1 < \dots < i_p \; ; \; j_1 < \dots < j_p)$ extrait de X.

Nous allons voir qu'il n'y a , dans Δ , aucune suppression de termes.

a) Supposons d'abord qu'il n'y ait aucun, ou qu'il n'y ait qu'un seul indice commun dans les deux suites $i_1 \dots i_p$ et $j_1 \dots j_p$. On voit alors que toutes les variables x^j_i qui figurent dans Δ sont indépendantes. Il ne peut donc y avoir deux termes semblables, dans ce déterminant.

b) Supposons qu'il y ait deux indices communs dans les deux suites $i_1 \dots i_p$, $j_1 \dots j_p$, par exemple, pour fixer les idées, les deux premiers. Soit $\Delta = x^{\alpha\beta\, i_3 \dots i_p}_{\alpha\beta\, j_3 \dots j_p}$ un tel mineur.

Tous les éléments de Δ sont indépendants, sauf peut-être ceux situés à l'intérieur du tableau symétrique d'ordre 2 formé par les lignes et colonnes α et β de X .Posons : $\delta = x^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$.

Développons Δ suivant les mineurs extraits des lignes α et β , et considérons successivement les produits de ces déterminants par leurs cofacteurs :

1°) Dans le produit de δ par son cofacteur, aucune suppression de termes n'intervient : ceci résulte de la 1ère remarque, et du fait que tous les termes du cofacteur sont distincts.

2°) Considérons le produit d'un déterminant tel que $x^{\alpha\alpha_1}_{\alpha\beta}$, avec $\alpha_1 \neq \beta$, par son cofacteur . Dans $x^{\alpha\,\alpha_1}_{\alpha\,\beta}$, il n'y a aucune suppression de terme : conséquence de a), et pas davantage dans le produit de ce déterminant par son cofacteur, car tous les termes du cofacteur sont distincts. Pas de suppression non plus entre l'ensemble de termes du 1°)

et celui du 2°), car un terme quelconque du cofacteur de δ est distinct d'un terme quelconque du cofacteur de $x^{\alpha\alpha_1}_{\alpha\beta}$, et aucun élément des p-2 dernières lignes de Δ ne se retrouve dans les 2 premières.

3°) Enfin, dans le produit d'un déterminant tel que $x^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha\beta}$, avec $\alpha_1 \neq \alpha$ et β, $\beta_1 \neq \alpha$ et β, par son cofacteur, il est évident qu'aucune suppression de termes n'intervient, car toutes les variables x^i_j qui figurent dans l'un ou l'autre des déterminants du produit sont indépendantes. Il n'y a pas de suppression non plus entre les ensembles 1°, 2°, 3° précédents, pour une raison déjà indiquée (1).

c) Supposons maintenant qu'il y ait 3 indices communs dans les deux suites $i_1,\ldots,i_p$ et $j_1,\ldots j_p$.

Un raisonnement semblable au précédent montre qu'aucune suppression de termes ne peut intervenir dans le développement d'un tel mineur de X.

Le raisonnement se poursuit ensuite, de proche en proche. Finalement :

Aucune suppression de termes ne se produit dans le développement d'un mineur quelconque de X.

Nous avons fait la démonstration en supposant que, dans les suites $i_1\ldots i_p$ et $j_1\ldots j_p$, les indices (tous distincts, dans chaque suite), étaient rangés par ordre de grandeur croissante. Il est évident que cette restriction n'a rien d'essentiel. La conclusion est valable pour tout mineur formé avec p lignes distinctes et p colonnes distinctes de X.

On en conclut, par exemple que, si chacune des deux suites $i_1\ldots i_p$ et $j_1\ldots j_p$ est exempte de répétition, le produit :

$$x^{i_1}_{j_1}\; x^{i_2}_{j_2} \ldots x^{i_p}_{j_p}$$

figure avec un coefficient non nul dans le développement de $x^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}$

---

(1) Non seulement il n'y a aucune suppression de termes dans $\Delta = x^{\alpha\beta\, i_1\ldots i_p}_{\alpha\beta\, j_1\ldots j_p}$ mais il n'y a même pas de réduction de termes semblables. Tous les termes de ce déterminant sont distincts, car les seuls termes semblables qui pourraient se présenter devraient provenir de $x^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$; or les deux termes d'un tel déterminant sont distincts.

Démonstration du lemme, dans le cas : $p = 3$, n quelconque :

Supposons par exemple, $b^{123} \neq 0$.

Le terme $x_1^1\, x_2^2\, x_3^3$ figure seulement dans x_{123}^{123}, avec un coefficient non nul. En écrivant que son coefficient dans Φ est nul, il vient : $a_{123} = 0$.

Le terme $x_1^1\, x_2^2\, x_3^4$ s'écrit aussi $x_1^1\, x_2^2\, x_4^3$. Il figure seulement dans x_{123}^{124} et x_{124}^{123}, avec des coefficients non nuls. En écrivant que son coefficient dans Φ est nul, il vient compte tenu de $a_{123} = 0$: $a_{124} = 0$, etc... de même : $a_{125} = a_{126} = \dots = a_{12n} = 0$.

Le terme $x_1^1\, x_2^4\, x_3^3$ s'écrit aussi $x_1^1\, x_4^2\, x_3^3$. Il figure seulement dans x_{123}^{134} et x_{134}^{123}, avec des coefficients non nuls. Comme $a_{123} = 0$, il vient $a_{134} = 0$, De même : $a_{135} = a_{136} = \dots = a_{13n} = 0$.

Et plus généralement :

$$a_{1ij} = 0 \qquad \text{pour } i, j > 1.$$

Ensuite :
Le terme $x_2^2\, x_3^3\, x_1^4$ s'écrit aussi $x_2^2\, x_3^3\, x_4^1$. Il figure seulement dans x_{123}^{234} et x_{234}^{123}. Comme $a_{123} = 0$, il vient $a_{234} = 0$.

De même : $a_{235} = \dots = a_{23n} = 0$, Et plus généralement :

$$a_{2ij} = 0 \qquad \text{pour } i, j > 2.$$

On considère ensuite le terme $x_3^3\, x_1^4\, x_2^5$ qui s'écrit aussi $x_3^3\, x_4^1\, x_2^5$ ou $x_3^3\, x_1^4\, x_5^2$ ou $x_3^3\, x_4^1\, x_5^2$. Par un raisonnement semblable aux précédents, on arrive à la conclusion

$$a_{345} = 0.$$

De même, $a_{346} = \dots = a_{34n} = 0$, et plus généralement,

$$a_{3ij} = 0 \qquad \text{pour } i, j > 3.$$

Enfin considérons le terme $x_1^4\, x_2^5\, x_3^6$ qui s'écrit aussi $x_4^1\, x_2^5\, x_3^6$ ou $x_1^4\, x_5^2\, x_3^6$ ou $x_1^4\, x_2^5\, x_6^3$ ou $x_4^1\, x_5^2\, x_3^6$ ou $x_4^1\, x_2^5\, x_6^3$ ou $x_1^4\, x_5^2\, x_6^3$ ou $x_4^1\, x_5^2\, x_6^3$. Comme on a :

$$a_{156} = a_{246} = a_{345} = a_{126} = a_{234} = a_{123} = a_{135} = 0$$

(car chacun de ces coefficients contient au moins une fois l'un des indices 1,2,3), il vient :

$$a_{456} = 0.$$

Plus généralement :

$$a_{ijk} = 0 \quad \text{pour} \quad i,j,k > 3.$$

Car la même raison sera encore valable.
Finalement tous les a_{ijk} sont nuls.

C.Q.F.D.

82 ter - <u>THEOREME</u>

Le rang d'un système caractéristique par rapport aux dp_i (1) est égal au degré de l'équation de Monge-Ampère par rapport aux dérivées du second ordre.

On peut supposer le système caractéristique mis sous la forme :

$$\begin{cases} dz = \sum_i p_i\, dx_i \\ \theta_i = 0 \qquad (i = 1,\dots,n) \end{cases}$$

les θ_i ne contenant que les différentielles dx^i et dp_i .

---

(1) c'est-à-dire le rang du tableau des coefficients des dp_i dans le système caractéristique. Ce rang n'est pas modifié si on remplace le système caractéristique par un système algébriquement équivalent.

Supposons que le rang de ce système par rapport aux dp_i soit égal à h. Ce système peut être mis sous la forme (par exemple) :

$$\begin{cases} \omega \equiv dz - \sum_i p_i dx^i = 0 \\ dp_k + a_k^\lambda \, dp_\lambda + b_{ki} \, dx^i = 0 & (k = 1, \ldots, h) \\ & (\lambda = h+1, \ldots, n) \\ \theta_\rho \equiv c_{\rho i} \, dx^i = 0 & (\rho = h+1; \ldots, n)^{(1)} \end{cases}$$

les θ_ρ étant des formes distinctes en les dx^i.
L'équation de Monge-Ampère correspondante est la suivante:

$$\begin{vmatrix} p_{11} + a_1^\lambda \, p_{\lambda 1} + b_{11} & \ldots\ldots, & p_{1n} + a_1^\lambda \, p_{\lambda n} + b_{1n} \\ \vdots & & \\ p_{h1} + a_h^\lambda \, p_{\lambda 1} + b_{h1} & \ldots\ldots, & p_{hn} + a_h^\lambda \, p_{\lambda n} + b_{hn} \\ c_{h+1,1} & \ldots\ldots, & c_{h+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \ldots\ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Posons pour $k \leqslant h$, $k' \leqslant h$: $a_k^{k'} = \delta_k^{k'}$ (Kronecker) , $(k' = 1, \ldots h)$.
et désignons par A la matrice de dimensions (h,n) , d'élément général a_k^i , par P la matrice carrée d'élément général p_{ij}.

On vérifie aisément que la matrice de dimensions (h,n), d'élément général

$$(p_{ki} + a_k^\lambda \, p_{\lambda i})$$

n'est autre que AP.

Soit $a^{i_1 \ldots i_h}$ le déterminant formé avec les colonnes $i_1 \ldots i_h$ de A. Celui formé avec les colonnes $j_1, \ldots j_h$ de AP est égal , comme on sait à :

(1) conventions sur les indices valables pour tout le numéro.

$$\frac{1}{h!} \; a^{i_1 \dots i_h} \; p^{j_1 \dots j_h}_{i_1 \dots i_h} \; .$$

Soit $j_1 \dots j_n$ une permutation de la 1ère classe des n premiers entiers, Désignons par $c_{j_1 \dots j_h}$ le déterminant formé par les colonnes $j_{h+1} \dots j_n$ du tableau d'élément général $c_{\lambda i}$.

L'ensemble des termes de degré h par rapport aux dérivées du second ordre , dans l'équation de Monge-Ampère se met sous la forme :

$$\frac{1}{(h!)^2} \; c_{j_1 \dots j_h} \; a^{i_1 \dots i_h} \; p^{j_1 \dots j_h}_{i_1 \dots i_h}$$

Or les $c_{j_1 \dots j_h}$ ne sont pas tous nuls, puisque les formes θ_λ sont indépendantes, et de même pour les $a^{i_1 \dots i_h}$, puisque le tableau A est de rang h.

Donc l'équation de M.A. est effectivement de degré h par rapport aux dérivées partielles du second ordre.

C.Q.F.D.

83 - CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE LES SYSTEMES CARACTERISTIQUES SOIENT CONFONDUS.

On doit à M. Lepage[1] le théorème suivant :

Soit : $\omega = 0 \; , \; \theta_1 = 0, \dots, \theta_n = 0$

un système caractéristique d'une équation de M.A. . La condition nécessaire et suffisante pour que les systèmes caractéristiques de cette équation soient confondus s'écrit :

$$\omega \wedge d\omega \wedge \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n = 0.$$

(1) Cf. Mémoire C, n° 4 et suiv.

La démonstration peut se faire très simplement, en distinguant 2 cas :

A) Supposons d'abord que l'équation soit de la première forme . On peut alors , en remplaçant au besoin le système caractéristique donné par un syst)me algébriquement équivalent : (ce qui a pour seul effet de multiplier $\omega \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$ par un facteur non nul) supposer que θ_i est de la forme :

$$\theta_i \equiv dp_i + a_{ij}\, dx^j \qquad (i,j = 1,\ldots,n).$$

On a dans ce cas :

$$d\omega \equiv dx^i \wedge dp_i \qquad dx^i \wedge \theta_i - 1/2\,(a_{ij} - a_{ji})dx^i \wedge dx^j.$$

Prenons comme nouvelle base des formes linéaires aux 2n+1 variables x^i, z p_i, les formes indépendantes suivantes :

$$dx^1,\ldots,dx^n,\ \omega\ ,\ \theta_1,\ldots,\theta_n.$$

Dans cette base, la forme extérieure $\omega \wedge d\omega \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$ s'écrit :

$$(1/2\,(a_{ji} - a_{ij})dx^i \wedge dx^j\,) \wedge \omega \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n.$$

Pour qu'elle soit nulle, il faut et il suffit évidemment qu'on ait :

$$a_{ij} = a_{ji}\ ,$$

quels que soient i et j, ce qui exprime que les systèmes caractéristiques sont confondus.

B) Si l'équation donnée n'est pas de la 1ère forme , on peut toujours l'y ramener, par une T.C.

Soit Ω la forme analogue à ω , pour les nouvelles variables. Dans la T.C. envisagée, soit $\rho\,\Omega$, avec $\rho \neq 0$, la transformée de ω .

On voit sans peine que $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ désignant les transformées de $\theta_1, \ldots, \theta_n$, le produit extérieur : $\omega \wedge d\omega \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$ admet pour transformé :

$$\rho^2 .\ \Omega \wedge d\Omega \wedge \Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_n .$$

On est donc ramené au cas précédent.

Comme le fait pour une équation de M.A. d'avoir ses systèmes caractéristiques confondus est invariant dans une T.C. quelconque, on voit que le résultat établi ou A) pour une équation de la première forme est valable pour une équation de M.A. quelconque

C.Q.F.D.

84 - COURBES CARACTERISTIQUES

Soit V_n une variété à n dimensions de l'espace $(x^1,\ldots,x^n, z)$ solution d'une équation de M.A. donnée.

On appelle ligne caractéristique de V_n toute courbe (= variété à 1 dimension) de V_n vérifiant l'un des systèmes caractéristiques.

V_n possède en général deux familles de caractéristiques, dont chacune dépend de deux paramètres. Les familles sont confondues, si les systèmes caractéristiques le sont.

PARAGRAPHE 3 - INTEGRALES PREMIERES DES SYSTEMES CARACTERISTIQUES

85 - RELATION ENTRE INTEGRALES PREMIERES DE DEUX SYSTEMES

1) Si u est une intégrale première de l'un des systèmes, et v une intégrale première de l'autre, distinct, on a :

$$[u, v] = 0$$

2) Si les deux systèmes caractéristiques sont confondus, deux intégrales premières quelconques sont en involution.

Ces deux théorèmes ont été démontrés par M. Goursat pour les équations de la première forme (Mémoire 1899) . Ils sont donc vrais pour une équation de M.A. quelconque, car, par une transformation de contact, on peut toujours se ramener à ce cas.

86 - NOMBRE MAXIMUM D'INTEGRALES PREMIERES

Les intégrales premières d'un système caractéristique doivent vérifier un certain système linéaire et homogène de n équations aux dérivées partielles du 1er ordre à une fonction inconnue de 2n+1 variables indépendantes. Ce système présente le plus grand nombre de solutions distinctes lorsqu'il est complet (ou en involution). Dans ce cas, il admet un système fondamental composé de : $2n+1 - n = n+1$ solutions distinctes.

On démontre le Théorème suivant : Si l'un des systèmes caractéristiques admet $n+1$ intégrales premières distinctes, les deux systèmes caractéristiques sont confondus.

87 - CONDITION SUFFISANTE POUR QUE LES SYSTEMES CARACTERISTIQUES SOIENT CONFONDUS

THEOREME : Si l'un des systèmes caractéristiques admet n intégrales premières distinctes, deux à deux en involution, il en admet n+1 et les systèmes caractéristiques sont confondus .

Soit :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n = 0 \end{cases}$$

le système différentiel extérieur remplaçant l'équatinn de Monge-Ampère considérée

Soient $u_1, \ldots, u_n$ n intégrales premières, distinctes, du système :

(1) $$\omega = 0, \quad \theta_1 = 0, \ldots, \theta_n = 0$$

Nous savons (cf. n° 63) que le système de Pfaff :

(2) $$\omega = 0, \quad du_1 = 0, \ldots, du_n = 0$$

est de rang n+1.

On peut prendre ce système comme système caractéristique . En effet, il est facile de vérifier que les systèmes (1) et (2) sont algébriquement équivalents.

Or nous savons (n° 65) que le système (2) est complètement intégrable.

Il admet donc n+1 intégrales premières distinctes.

Par conséquent (N° 86) les deux systèmes caractéristiques de l'équation de M.A. sont bien confondus.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE - Si une équation de M.A. possède un seul système caractéristique, et si ce système n'est pas complètement intégrable, il admet au plus n-1 intégrales premières distinctes.

cf. E. Goursat, mémoire 1899, page 18
Vivanti , mémoire A, n° 8
M.Lepage, mémoire A, n° 7.

88 - INTEGRALES PREMIERES COMMUNES AUX DEUX SYSTEMES

1) Il résulte du théorème précédent et de celui du n° 85 que si une équation de M.A. possède deux systèmes caractéristiques , dont l'un admet n intégrales premières distinctes, le nombre d'intégrales premières distinctes communes aux deux systèmes est au plus n-2.

E. Goursat, mémoire 1899, page 20

2) On démontre aisément que le nombre d'intégrales premières distinctes communes aux deux systèmes caractéristiques se conserve dans une T.C. quelconque.

89 - FONCTION EN INVOLUTION AVEC n INTEGRALES PREMIERES DE L'UN DES SYSTEMES

THEOREME : Si une fonction est en involution avec n intégrales premières distinctes de l'un des systèmes caractéristiques, c'est, en général, une intégrale première de l'autre système (ou de même, si les deux sont confondus).

Supposons d'abord que l'équation de M.A. soit de la première forme , et soit :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ dp_i = a_i^j \, dx_j \end{cases}$$

l'un des systèmes caractéristiques, dont on connaît n intégrales premières distinctes : $u_1,\ldots,u_n$. Soit une fonction v, en involution avec les u_i, On démontre sans peine, moyennant l'hypothèse :

$$\frac{D(u_1,\ldots,u_n)}{D(p_1,\ldots,p_n)} \neq 0$$

(c'est la restriction qu'indiquent les mots "en général" de l'énoncé), que v vérifie le système :

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial v}{\partial z} + a_i^j \frac{\partial v}{\partial p_j} = 0, \quad (i, j = 1,\ldots, n).$$

c'est-à-dire est une intégrale première du second système caractéristique. Ce théorème est encore valable pour une équation de M.A. quelconque car, par une transformation de contact, on peut toujours se ramener au cas plus simple envisagé ci-dessus.

PARAGRAPHE QUATRE : CAS PARTICULIER : $n = 3$

Dans le cas particulier où n est égal à 3, nous pourrons donner plus de détails. Nous indiquerons pour chacune des 6 formes possibles d'équations (L) , les conditions pour qu'une telle équation soit du type de M.A., ainsi que les équations des systèmes caractéristiques, lorsque ces conditions sont vérifiées.

Pour simplifier les notations, nous poserons :

$$B^{23}_{23} = B_1 , \quad B^{31}_{31} = B_2 , \quad B^{12}_{12} = B_3 ,$$

$$B^{12}_{31} = C_1 , \quad B^{23}_{12} = C_2 , \quad B^{31}_{23} = C_3 ,$$

$$B^{1}_{1} = D_1 , \quad B^{2}_{2} = D_2 , \quad B^{3}_{3} = D_3 ,$$

$$B^{3}_{2} = E_1 , \quad B^{1}_{3} = E_2 , \quad B^{2}_{1} = E_3 .$$

$$C = F$$

Nous considérons donc l'équation (L) suivante :

$$Ap^{123}_{123} + B_1 p^{23}_{23} + B_2 p^{31}_{31} + B_3 p^{12}_{12} + 2C_1 p^{12}_{31} + 2C_2 p^{23}_{12} + 2C_3 p^{31}_{23}$$

$$+ D_1 p_{11} + D_2 p_{22} + D_3 p_{33} + 2E_1 p_{23} + 2E_2 p_{31} + 2E_3 p_{12}$$

$$+ F = 0.$$

90 - PREMIERE FORME : $A \not\equiv 0$

1) Conditions pour le type de M.A.

Deux cas à distinguer , suivant la valeur de :[1]

$$\Delta \equiv |C_1^2 + AD_1 - B_2B_3| + |C_2^2 + AD_2 - B_3B_1| + |C_3^2 + AD_3 - B_1B_2|$$

---

(1) On notera que dans C_1^2, C_2^2, etc... l'indice supérieur est un véritable exposant.

a) $\Delta \neq 0$.

Supposons pour fixer les idées : $C_1^2 + AD_1 - B_2B_3 \neq 0$.

Conditions pour le type de M.A. :

$$(C_1^2 + AD_1 - B_2B_3)(C_2^2 + AD_2 - B_3B_1) = (C_1C_2 - AE_3 - B_3 C_3)^2$$

$$(C_1^2 + AD_1 - B_2B_3)(C_3^2 + AD_3 - B_1B_2) = (C_1C_3 - AE_2 - B_2 C_2)^2$$

$$(C_1^2 + AD_1 - B_2B_3)(C_2 C_3 - AE_1 - B_1C_1) =$$

$$-(C_1C_2 - AE_3 - B_3C_3)(C_1C_3 - AE_2 - B_2C_2)$$

$$-2B_1B_2B_3 - 4C_1C_2C_3 + 2B_1C_1^2 + 2B_2C_2^2 + 2B_3C_3^2 +$$

$$+A(B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3 + 2C_1E_1 + 2C_2E_2 + 2C_3E_3) = A^2F.$$

(formules analogues si $C_1^2 + AD_1 - B_2B_3$ est nul, mais $C_2^2 + AD_2 - B_3B_1$, par exemple, différent de zéro, etc...)

b) $\Delta = 0$.

Conditions pour le type de M.A.

$$C_1C_2 - AE_3 - B_3C_3 = 0$$

$$C_2C_3 - AE_1 - B_1C_1 = 0$$

$$C_3C_1 - AE_2 - B_2C_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_3 & C_2 \\ C_3 & B_2 & C_1 \\ C_2 & C_1 & B_3 \end{vmatrix} = A^2F.$$

2) Systèmes caractéristiques (1)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{système (A)} & \theta_i \equiv dp_i + a_{ij}\, dx^j = 0 \\ \text{système (B)} & \theta_i \equiv dp_i + a_{ji}\, dx^j = 0 \end{array}\right\} \quad i,j = 1,2,3$$

avec

$$a_{11} = B_1 A^{-1} \qquad a_{22} = B_2 A^{-1} \qquad a_{33} = B_3 A^{-1}$$

$$a_{12} + a_{21} = 2C_3 A^{-1} \qquad a_{13} + a_{31} = 2C_2 A^{-1} \qquad a_{23} + a_{32} = 2C_1 A^{-1}$$

$$a_{23}a_{32} = B_2B_3A^{-2} - D_1A^{-1}\ , \quad a_{13}a_{31} = B_3B_1A^{-2} - D_2A^{-1}\ , \quad a_{12}a_{21} = B_1B_2\, A^{-2} - D_3A^{-1}$$

$$a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32} = 2E_3\, A^{-1} + 2B_3C_3\, A^{-2}$$

$$a_{31}a_{12} + a_{21}a_{13} = 2E_1\, A^{-1} + 2B_1C_1\, A^{-2}$$

$$a_{12}a_{23} + a_{32}a_{21} = 2E_2\, A^{-1} + 2B_2C_2\, A^{-2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = F\, A^{-1}.$$

systèmes caractéristiques distincts si $\Delta \neq 0$, confondus dans le cas contraire.

91 - DEUXIEME FORME : $A \equiv 0 \quad |B_1| + |B_2| + |B_3| \not\equiv 0$

Cette deuxième forme se divise en 3 espèces :

I - Première espèce : $B_1 \not\equiv 0$.

1) Conditions pour le type M.A.

Deux cas à distinguer, suivant la valeur de :

---

(1) Tout système caractéristique contient, comme première équation $\omega = 0$, Nous l'omettrons, pour abréger, ici et aux n° 91 à 95.

$$\Delta \equiv |C_3^2 - B_1B_2| + |C_2^2 - B_3B_1|$$

a) $\Delta \neq 0$.

Supposons, pour fixer les idées : $C_3^2 - B_1B_2 \neq 0$.
Conditions :

$$(C_3^2 - B_1B_2)(C_2^2 - B_1B_3) = (C_2C_3 - B_1C_1)^2$$

$$(C_3^2 - B_1B_2)(B_1F - D_2D_3 + E_1^2) = (B_1E_2 + C_2 D_3 + C_3 E_1)^2$$

$$(C_3^2 - B_1B_2)(B_1E_3 + C_3D_2 + C_2E_1) = -(C_2C_3 - B_1C_1)(B_1E_2 + C_2D_3 + C_3 E_1)$$

$$B_1(2E_1C_1 - 2E_2C_2 - 2E_3C_3 + B_2D_2 + B_3D_3) - 2(D_2C_3^2 + D_3C_2^2 + 2C_2C_3 E_1) =$$

$$= B_1^2 D_1.$$

(formules analogues si $C_3^2 - B_1B_2$ est nul , mais $C_2^2 - B_3B_1$ différent de zéro).

b) $\Delta = 0$.

Conditions

$$B_1E_3 + C_3D_2 + C_2E_1 = 0$$

$$B_1E_2 + D_3C_2 + C_3E_1 = 0$$

$$B_1C_1 - C_2C_3 = 0$$

$$B_1^2D_1 = 2C_2C_3E_1 + C_3^2D_2 + C_2^2 D_3.$$

2) Systèmes caractéristiques :

$$(A)\begin{cases} \theta_1 \equiv dx^1 + a_{12}dx^2 + a_{13}dx^3 = 0 \\ \theta_2 \equiv dp_2 + a_{22}dx^2 + a_{23}dx^3 + a_{24}dp_1 = 0 \\ \theta_3 \equiv dp_3 + a_{32}dx^2 + a_{33}dx^3 + a_{34}dp_1 = 0 \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} \theta_1 \equiv dx^1 - a_{24}dx^2 - a_{34}dx^3 = 0 \\ \theta_2 \equiv dp_2 + a_{22}dx^2 + a_{32}dx^3 - a_{12}dp_1 = 0 \\ \theta_3 \equiv dp_3 + a_{23}dx^2 + a_{33}dx^3 - a_{13}dp_1 = 0 \end{cases}$$

avec :

$$a_{12}a_{24} = -B_2B_1^{-1} \qquad a_{13}a_{34} = -B_3B_1^{-1}$$

$$-a_{24} + a_{12} = 2C_3B_1^{-1} \qquad -a_{34} + a_{13} = 2C_2B_1^{-1}$$

$$-a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} = 2C_1B_1^{-1}$$

$$a_{24}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{34}(a_{12}\,a_{23} - a_{13}a_{22}) = D_1B_1^{-1}$$

$$a_{33} = D_2B_1^{-1} \qquad a_{22} = D_3B_1^{-1}$$

$$a_{24}a_{33} - a_{34}a_{23} + a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} = 2E_3B_1^{-1}$$

$$a_{22}a_{34} - a_{24}a_{32} + a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} = 2E_2B_1^{-1}$$

$$-(a_{23} + a_{32}) = 2E_1B_1^{-1} \qquad a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = F\,B_1^{-1}$$

systèmes distincts si on a $\Delta + |E_1^2 + B_1F - D_2D_3| \not\equiv 0$, confondus dans le cas contraire.

II - Deuxième espèce : $B_1 \equiv 0$, $B_2 \not\equiv 0$.

III - Troisième espèce : $B_1 \equiv B_2 \equiv 0$, $B_3 \not\equiv 0$.

De simples permutations circulaires sur les indices 1, 2 et 3 des x^i et p_i permeteent d'écrire, à partir des formules relatives à la première espèce , celles correspondant aux autres divisions.

<u>Remarque</u> : Si l'on a $A \equiv B_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $C_1C_2C_3 \not\equiv 0$, l'équation n'est pas du type de M.A.

92 - <u>TROISIEME FORME</u> : $A \equiv B_i \equiv 0$ $(i= 1,2,3)$, <u>un , et un seul , des coefficients</u> C_i <u>étant nul identiquement</u> .

I - Première espèce : $C_1 \equiv 0$

1) Conditions pour le type de Monge-Ampère :

$$D_1 = 0 \qquad 2E_1C_2C_3 + D_3C_2^2 + D_2C_3^2 = 0$$

$$FC_3C_2 + E_2C_3D_2 + E_3D_3C_2 = 0$$

2) Systèmes caractéristiques :

$$(A) \quad \begin{cases} \theta_1 \equiv dx^1 = 0 \\ \theta_2 \equiv dp_1 + a_{22}dx^2 + a_{23}dx^3 = 0 \\ \theta_3 \equiv dp_3 + a_{32}dx^2 + a_{33}dx^3 + a_{35}dp_2 = 0 \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \theta_1 \equiv dx^2 - a_{35}dx^3 = 0 \\ \theta_2 \equiv dp_2 + a_{22}dx^1 + a_{32}dx^3 = 0 \\ \theta_3 \equiv dp_3 + a_{23}dx^1 + a_{33}dx^3 = 0 \end{cases}$$

avec

$$a_{35} = -C_2C_3^{-1} \qquad 2a_{23}\, a_{35} = D_2C_3^{-1}$$

$$-2a_{22} = D_3C_3^{-1} \qquad -a_{33} = E_3C_3^{-1} \qquad a_{32} = E_2C_3^{-1}$$

$$-a_{22}a_{35} + a_{23} = E_1C_3^{-1} \qquad 2(a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33}) = FC_3^{-1}$$

systèmes toujours distincts.

II - Deuxième espèce : $C_2 \equiv 0$

III - Troisième espèce : $C_3 \equiv 0$

Les formules, pour ces deux espèces, se déduisent des précédentes par des permutations circulaires sur les indices 1,2,3 des x^i et p_i.

93 - <u>QUATRIEME FORME : $A \equiv B_i \equiv 0$ (i= 1,2,3) deux,et deux seulement des coefficients C_i étant nuls identiquement</u> .

I - Première espèce : $C_3 \not\equiv 0$

1) Conditions pour le type de M.A.

$$D_1 = 0 \qquad D_2 = 0 \qquad FC_3 + D_3E_3 - 2E_1E_2 = 0$$

2) systèmes caractéristiques

$$(A)\begin{cases}\theta_1 \equiv dx^1 = 0\\ \theta_2 \equiv dp_1 + a_{22}dx^2 + a_{23}dx^3 = 0\\ \theta_3 \equiv dp_3 + a_{32}dx^2 + a_{33}dx^3 = 0\end{cases}$$

$$(B)\begin{cases}\theta_1 \equiv dx^2 = 0\\ \theta_2 \equiv dp_2 + a_{22}dx^1 + a_{32}dx^3 = 0\\ \theta_3 \equiv dp_3 + a_{23}dx^1 + a_{33}dx^3 = 0\end{cases}$$

avec

$$2a_{22} = -D_3C_3^{-1} \qquad a_{33} = -E_3C_3^{-1} \qquad a_{32} = E_2C_3^{-1}$$

$$a_{23} = E_1C_3^{-1} \qquad -2(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = FC_3^{-1}$$

systèmes toujours distincts.

II -Deuxième espèce : $C_1 \not\equiv 0$

III - Troisième espèce : $C_2 \not\equiv 0$

Résultats déduits des précédents par permutations circulaires d'indices.

94 - <u>CINQUIEME FORME :</u> $A \equiv B_i \equiv C_i \equiv 0$ $(i = 1,2,3)$, <u>l'un des coefficients D_i n'étant pas nul</u>

I - Première espèce : $D_1 \not\equiv 0$

1) Conditions pour le type de M.A.

$$D_1E_1^2 + D_2E_2^2 + D_3E_3^2 - 2E_1E_2E_3 - D_1D_2D_3 = 0$$

2) Systèmes caractéristiques

$$(A)\quad \begin{aligned}\theta_1 &\equiv dx^2 + a_{11}dx^1 = 0\\ \theta_2 &\equiv dx^3 + a_{21}dx^1 = 0\\ \theta_3 &\equiv dp_1 + a_{31}dx^1 + a_{35}dp_2 + a_{36}dp_3 = 0\end{aligned}$$

$$\theta_1 \equiv dx^2 - a_{35}\, dx^1 = 0$$

$$\text{(B)} \qquad \theta_2 \equiv dx^3 - a_{36}\, dx^1 = 0$$

$$\theta_3 \equiv dp_1 + a_{31} dx^1 - a_{11}\, dp_2 - a_{21} dp_3 = 0$$

avec $\quad -a_{11}a_{35} = D_2 D_1^{-1} \qquad -a_{36}a_{21} = D_3 D_1^{-1}$

$$a_{35} - a_{11} = 2E_3 D_1^{-1} \qquad -a_{21} + a_{36} = 2E_2 D_1^{-1}$$

$$a_{31} = F D_1^{-1} \qquad -a_{21}a_{35} - a_{11}a_{36} = 2E_1 D_1^{-1} .$$

Systèmes distincts si

$$|E_3^2 - D_1 D_2| + |E_2^2 - D_3 D_1|$$

est différent de zéro; confondus dans le cas contraire.

II - Deuxième espèce : $D_1 \equiv 0 \qquad D_2 \not\equiv 0$

III - Troisième espèce : $D_1 \equiv D_2 \equiv 0 \quad , \quad D_3 \not\equiv 0$

Résultats déduits des précédents par permutations circulaires (la condition pour le type de M.A. est la même, pour les 3 espèces).

Remarque : Si l'on a : $A \equiv B_i \equiv C_i \equiv D_i \not\equiv 0 \quad (i = 1,2,3)$
$E_1 E_2 E_3 \neq 0$, l'équation n'est pas du type de M.A.

95 - <u>SIXIEME FORME</u> $\quad A \equiv B_i \equiv C_i \equiv D_i \equiv 0 \quad (i = 1,2,3)$ <u>un au moins, deux au plus des coefficients</u> E_i <u>étant identiquement nuls</u>.

I - Première espèce : $E_3 \not\equiv 0 \ , \quad E_1 \equiv 0$

L' équation est toujours du type de M.A. Les systèmes caractéristiques, distincts, sont les suivants :

$$\theta_1 \equiv dx^1 = 0$$

$$\text{(A)} \qquad \theta_2 \equiv dx^3 + a_{22}\, dx^2 = 0$$

$$\theta_3 \equiv dp_1 + a_{32}\, dx^2 = 0$$

$$\theta_1 \equiv dx^2 = 0$$

$$\text{(B)} \qquad \theta_2 \equiv dx^3 = 0$$

$$\theta_3 \equiv dp_2 + a_{32}\, dx^1 - a_{22}\, dp_3 = 0$$

avec : $E_2 E_3^{-1} = -a_{22}$ $\qquad FE_3^{-1} = 2a_{32}$.

II - Deuxième espèce : $E_1 \not\equiv 0$, $E_2 \equiv 0$

III - Troisième espèce : $E_2 \not\equiv 0$, $E_3 \equiv 0$.

Résultats déduits des précédents par permutations circulaires des indices.

96 - THEOREME D'EXISTENCE POUR UNE EQUATION DE MONGE-AMPERE.

On peut vérifier que toute équation de Monge-Ampère à 3 variables indépendantes peut être remplacée par un système différentiel extérieur en involution (même si l'équation n'est pas de la première forme).

Le théorème d'existence démontré pour un tel système s'applique donc immédiatement.

CHAPITRE DEUX

FORMES CANONIQUES

On trouve, dans le Mémoire de M. Goursat, des formes canoniques pour les équations de Monge-Ampère, dans les cas les plus favorables, suivant que les systèmes caractéristiques sont confondus, ou distincts.

Nous rappellerons ces résultats aux n° 97 et 99 et nous donnerons de nouvelles formes canoniques, correspondant à d'autres cas qui peuvent se présenter.

PARAGRAPHE UN : SYSTEMES CARACTERISTIQUES CONFONDUS

97 - n+1 INTEGRALES PREMIERES DISTINCTES

Si l'on connaît n+1 intégrales premières distinctes du système caractéristique, on peut, par une T.C. , ramener l'équation à la forme :

$$p_{11} = 0.$$

(E. Goursat , mémoire 1899 , page 17).

Le cas où l'on connaît n intégrales premières distinctes se ramène au précédent. En effet, le système caractéristique est alors, comme on sait, complètement intégrable, et admet donc n+1 intégrales premières distinctes.

98 - n-h INTEGRALES PREMIERES DISTINCTES (h = 1,2,...,n-1)

Théorème : Si l'on connaît n-h intégrales premières distinctes du système caractéristique, on peut, par une T.C., ramener l'équation à la forme :

$$\left\| a_{kl} + \sum_{g=1}^{h} b_{kg}\, p_{gl} \right\| = 0$$

où le premier membre est un déterminant d'ordre h, dont on n'a écrit que le terme général (k,l), dans lequel les a_{kl} et b_{kg} ne contiennent que les dérivées partielles du 1er ordre.

Soit :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n = 0 \end{cases}$$

le système différentiel remplaçant l'équation de M.A. donnée, et $u^{h+1},\ldots,u^n$ n-h intégrales premières distinctes du système caractéristique (unique).

Par hypothèse, il existe des fonctions $a^{\alpha i}$ et b^{α} de $x^1,\ldots,x^{2n+1}$, telles que :

$$du^{\alpha} = a^{\alpha i}\,\theta_i + b^{\alpha}\omega \qquad (\alpha = h+1,\dots,n)$$
$$(i = 1,\dots,n)$$

Comme d'après le théorème du n° 63, le système de Pfaff :

$$du^{\alpha} = 0 \quad , \quad \omega = 0$$

est de rang $n-h+1$, il en résulte que le tableau d'élément général $a^{\alpha i}$ est de rang $n-h$. Supposons que la matrice d'élément général $a^{\alpha\beta}$ ($\beta = h+1,\dots,n$) soit régulière.

Dès lors le système :

$$\omega = 0 \ , \ \theta_1 = 0,\dots, \theta_h = 0, \quad du^{\alpha} = 0 \qquad (\alpha = h+1,\dots,n)$$

est équivalent à :

$$\omega = 0 \ , \quad \theta_i = 0 \qquad (i = 1,\dots,n)$$

Donc l'équation de M.A. considérée peut être remplacée par le système différentiel extérieur :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_h \wedge du^{h+1} \wedge \dots \wedge du^n = 0 \end{cases}$$

Les fonctions $u^{h+1}\dots u^n$ étant en involution deux par deux, on peut trouver $h+1$ fonctions $u^1\dots u^h$, u^{2n+1} vérifiant :

$$[u^{\alpha}\ u^{\beta}] = 0 \quad [u^{2n+1}\ u^{\alpha}] = 0 \quad [u^{\beta}\ u^{\gamma}] = 0 \quad [u^{\beta}\ u^{2n+1}] = 0$$

($\alpha = h+1,\dots,n$; $\beta, \gamma = 1,\dots,h$) .

(cf. Goursat . Leçons ... 1er ordre pp. 289-290).

En possession des fonctions $u^1,\dots,u^n, u^{2n+1}$ deux à deux en involution, on peut trouver, et d'une seule façon n autres fanctions $u^{n+1},\dots,u^{2n}$ telles que l'on ait :

$$du^{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} u^{n+i}\,du^i = \rho\,(dx^{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} x^{n+i}\,dx^i)$$

où $\rho \not\equiv 0$. (cf. Goursat. Leçons ... 1er ordre , p. 376).

Posons $X^k = u^k$ ($k = 1,\dots,2n+1$).

La transformation ainsi définie est évidemment une T.C. Le nouveau système caractéristique peut s'écrire :

$$\Omega \equiv dX^{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} X^{i+n}\,dX^i = 0$$

$$\Theta_1 = 0,\dots, \ \Theta_h = 0, \quad dX^{\alpha} = 0 \qquad (\alpha = h+1,\dots,n).$$

les Θ_{β} étant des formes de Pfaff en les $2n+1$ différentielles dX^k.

La nouvelle équation de M.A. peut donc être remplacée par un système de la forme :

$$\begin{cases} \Omega = 0 \\ \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_h \wedge dX^{h+1} \wedge \dots \wedge dX^n = 0 \end{cases}$$

avec $\Phi_\beta = A_{\beta\gamma}\, dX^\gamma + A_{\beta j}\, dX^j$
$(\beta, \gamma = 1,\dots,h, \quad j = n+1,\dots,2n)$.

les $A_{\beta\gamma}$ et $A_{\beta j}$ étant certaines fonctions des X^k. Cette équation est donc :

$$\left\| A_{\beta\gamma} + \sum_{i=1}^{n} A_{\beta,n+i}\, P_{i\gamma} \right\| = 0$$

où le premier membre est un déterminant d'ordre h. Comme ses systèmes caractéristiques sont confondus (n° 81) on a (n° 83) :

(2) $$\Omega \wedge d\Omega \wedge \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_h \wedge dX^{h+1} \wedge \dots \wedge dX^n = 0$$

Nous allons en déduire que l'équation transformée est de la forme :

(3) $$\left\| A_{\beta\gamma} + \sum_{g=1}^{h} A_{\beta,n+g}\, P_{g\gamma} \right\| = 0 ,$$

où l'indice g ne prend que les valeurs 1,...,h (au lieu de 1,..,n pour i). Il suffit, pour cela, de démontrer que tout déterminant de la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} A_{1,\alpha_1}, \dots, A_{1,\alpha_r}, & A_{1,n+\beta_1}, \dots, A_{1,n+\beta_s} \\ \vdots & \\ A_{h,\alpha_1}, \dots, A_{h,\alpha_r}, & A_{h,n+\beta_1}, \dots, A_{h,n+\beta_s} \end{vmatrix} ,$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des entiers distincts quelconques appartenant à la suite, 1,...,h;

$\beta_1, \dots, \beta_s$ des entiers distincts quelconques appartenant à la suite h+1,...,n;

est nul.

La propriété doit subsister pour tout choix de r et s, avec $0 \leq r \leq h-1$; $1 \leq s \leq h$, la somme r+s étant égale à h.

Or, joignons à la suite $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ un entier α_0 distinct des précédents, et choisi à volonté parmi les h premiers entiers. On vérifie aisément que le déterminant ci-dessus est, au signe près, le coefficient de :

$$dX^{2n+1} \wedge dX^{\alpha_0} \wedge dX^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dX^{\alpha_r} \wedge dX^{h+1} \wedge \ldots \wedge dX^{n} \wedge dX^{n+\alpha_0} \wedge dX^{n+\beta_1} \wedge \ldots \wedge dX^{n+\beta_s} ,$$

dans le premier membre de (2). Il est donc nul. Il en résulte que l'équation de M.A. est bien de la forme (3) . Le théorème est démontré.

Cas particulier : si $h = 1$, on a la forme canonique suivante : $A_{11} + A_{1,n+1} P_{11} = 0$.

98bis - EXEMPLE DE REDUCTION A UNE FORME CANONIQUE

Considérons l'équation

$$\begin{vmatrix} p_{11} + \dfrac{p_1(2 - p_1x_1)}{x_1} & p_{12} + p_1(1 - p_2) & p_{13} \\ p_{21} + p_1(1 - p_2) & p_{22} + p_2(1 - p_2) & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}+p_1x_1^2-p_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Son système caractéristique, unique :

$$S \begin{cases} dz - \sum_i p_i \, dx_i = 0 \\ dp_1 + \dfrac{p_1 (2-p_1x_1)}{x_1} dx_1 + p_1(1 - p_2) \, dx_2 = 0 \\ dp_2 + p_1(1 - p_2)dx_1 + p_2(1 - p_2) \, dx_2 = 0 \\ dp_3 + (p_1 x_1^2 - p_3^2) \, dx_3 = 0 \end{cases}$$

n'est pas complètement intégrable, mais on vérifie que cette propriété appartient au système S' formé par les lignes 2 et 3 de S.

On trouve aisément, pour solution générale de S' :

$$(1) \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{x_1 + (c_2-c_1 e^{x_2})x_1^2} \\ p_2 = \dfrac{c_2 x_1 + 1}{(c_2 - c_1 e^{x_2}) x_1 + 1} \end{cases}$$

c_1 et c_2 désignant deux constantes arbitraires.
D'où on déduit les deux intégrales premières suivantes :

$$X_1 = \frac{p_1 x_1^2}{p_2 - 1} e^{x_2}$$

$$X_2 = \frac{p_2 - p_1 x_1}{p_2 - 1} e^{x_2}$$

Nous prendrons ces fonctions pour nouvelles variables X_1 et X_2. Il s'agit de compléter le changement de variables de manière à obtenir une transformation de contact. Les fonctions X_1 et X_2 ne dépendant pas de p_3 ni de x_3, il est clair qu'elles sont en involution avec x_3, qui est distincte de chacune d'elles. On prendra donc : $X_3 = x_3$.

Pour trouver Z, résolvons le système en involution :

$$[f, X_1] = [f, X_2] = [f, X_3] = 0 \text{ , c'est-à-dire :}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial z} - (1 - p_2)\left(p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2}\right) = 0$$

$$x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right) + p_1 (p_1 x_1 - 2)\frac{\partial f}{\partial p_1} + (p_2 - 1) p_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0,$$

auquel est associé le système aux différentielles totales complètement intégrable :

$$T \begin{cases} dx_3 = 0 \\ dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \\ dp_1 = \frac{p_1}{x_1}(p_1 x_1 - 2)dx_1 + (p_2 - 1)p_1 dx_2 \\ dp_2 = (p_2 - 1)(p_1 dx_1 + p_2 dx_2) \end{cases}$$

Les deux dernières équations de T sont celles du système S'. Si donc, dans la deuxième équation de T, on remplace p_1 et p_2 par les expressions (1), on obtient une équation aux différentielles totales complètement intégrable , qui est la suivante :

$$dz = \frac{dx_1}{x_1 + (c_2 - c_1 e^{x_2})x_1^2} + \frac{(c_2 x_1 + 1)\, dx_2}{(c_2 - c_1 e^{x_2})x_1 + 1}$$

PARAGRAPHE DEUX - SYSTEMES CARACTERISTIQUES DISTINCTS

99 - n INTEGRALES PREMIERES POUR CHAQUE SYSTEME

M. Goursat , dans son mémoire de 1899, étudie les équations dont chacun des deux systemes caracteristiques admet n integrales premières distinctes. A vrai dire, il ne considère que les équations de la première forme[1], mais ses conclusions sont valables pour toutes les formes , car elles s'appuient sur la propriété , toujours vérifiée , que toute intégrale de l'un des systèmes est en involution avec une intégrale quelconque de l'autre.

Voici, en somme, les résultats obtenus :

Soit une équation de Monge-Ampère , dont chacun des systèmes caractéristiques (distincts) admet n intégrales premières distinctes .

Supposons qu'il existe h, et seulement h, intégrales premières communes aux deux systèmes $(0 \leqslant h \leqslant n-2)$

Deux cas sont à distinguer , suivant la parité de n-h :

a) supposons n-h pair : $n-h = 2m$

On a : $1 \leqslant m \leqslant n/2$.

L'équation est alors, par une transformation de contact, réductible à la forme canonique suivante :

$$\begin{vmatrix} P_{1,\,n-m+1} & , \ldots , & P_{1,n} \\ \vdots & & \\ P_{m,n-m+1} & , \ldots , & P_{m,n} \end{vmatrix} = 0$$

dont le premier membre est un déterminant d'ordre m . Pour $h = n-2$, plus grande valeur possible , on a la forme canonique :

$$P_{1,n} = 0 .$$

b) Supposons n-h impair , $n-h = 2m-1$, avec $2 \leqslant m \leqslant \frac{n+1}{2}$.

L'équation est alors, par une transformation de contact, réductible à la forme canonique suivante :

---

(1) cf. en haut de la page 19, la référence aux système linéaires (13) et (14) qui supposent une équation de la 1ère forme.

$$\begin{vmatrix} P_m P_{1,n-m+2} - P_1 P_{m,n-m+2}, \ldots, P_m P_{1,n} - P_1 P_{m,n} \\ \vdots \\ P_m P_{m-1,n-m+2} - P_{m-1} P_{m,n-m+2}, \ldots, P_m P_{m-1,n} - P_{m-1} P_{m,n} \end{vmatrix} = 0$$

dont le premier membre est un déterminant d'ordre $m-1$.
Si $h = n-3$, plus grande valeur possible rendant $n-h$ impair, on a la forme canonique :

$$P_2 P_{1,n} - P_1 P_{2,n} = 0 .$$

Les équations canoniques ci-dessus indiquées ont été intégrées par M. E. Goursat (cf. Mémoire 1899, p. 25).
La réduction d'une équation à l'une des deux formes canoniques précédentes peut constituer une méthode d'intégration, qu'on pourrait appeler : méthode de Lie-Goursat. En effet, connaissant la solution générale de l'équation canonique, on en déduit, en effectuant la transformation de contact inverse de celle qui a conduit à cette équation, la solution générale de l'équation de Monge-Ampère initiale. Nous allonss résoudre par cette voie une équation que nous reprendrons, plus loin, comme exemple d'application d'une autre méthode d'intégration, plus rapide en l'occurence que celle de Lie-Goursat.

99bis - EXEMPLE D'INTEGRATION PAR LA METHODE DE LIE-GOURSAT

Considérons, comme exemple, l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ p_{21} - a_{12} p_{11} & p_{22} + a_{22} - a_{12} p_{12} & p_{23} + a_{23} - a_{12} p_{13} \\ p_{31} - a_{13} p_{11} & p_{32} + a_{32} - a_{13} p_{12} & p_{33} + a_{33} - a_{13} p_{13} \end{vmatrix} = 0$$

où a_{12} et a_{13} sont les dérivées partielles par rapport à x_2 et x_3 respectivement d'une fonction $A(x_2, x_3)$ et

$$a_{22} + p_1 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}, \quad a_{33} + p_1 \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3}, \quad a_{23} + p_1 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_3}, \quad a_{32} + p_1 \frac{\partial a_{13}}{\partial x_2}$$

des constantes, notées respectivement : b_{22}, b_{33}, b_{23}, b_{32}, dont les deux dernières sont distinctes : $b_{32} - b_{23} = B \neq 0$. On vérifie que l'équation est du type de Monge-Ampère , et que ses 2 systèmes caractéristiques , distincts , admettent les intégrales premières suivantes :

1er système :

$$u_1 = x_1 + A(x_2, x_3)$$
$$u_2 = b_{22}\, x_2 + b_{23}\, x_3 + p_2 - a_{12}\, p_1$$
$$u_3 = b_{32}\, x_2 + b_{33}\, x_3 + p_3 - a_{13}\, p_1$$

2ème système :

$$v_1 = u_1$$
$$v_2 = u_3 - B\, x_2$$
$$v_3 = u_2 + B\, x_3$$

Soient U_i et V_i ce que deviennent u_i et v_i par le changement de variables :

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & z & p_1 & p_2 & p_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & -q_1/q_4 & -q_2/q_4 & -q_3/q_4 \end{array}$$

On vérifie que $(U_2\ U_3)$ et (V_2, V_3) ne sont pas identiquement nuls. Posons $(U_2\ U_3) = U_4$ $(V_2\ V_3) = V_4$. On a :

$$U_1 = y_1 + A(y_2\ y_3) \qquad V_1 = U_1$$

$$U_2 = \frac{-q_2}{q_4} + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + a_{12}\frac{q_1}{q_4}\ ; \quad V_2 = \frac{-q_3}{q_4} + b_{23}y_2 + b_{33}y_3 + a_{13}\frac{q_1}{q_4}$$

$$U_3 = \frac{-q_3}{q_4} + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + a_{13}\frac{q_1}{q_4}\ ; \quad V_3 = \frac{-q_2}{q_4} + b_{22}y_2 + b_{32}y_3 + a_{12}\frac{q_1}{q_4}$$

$$U_4 = -\frac{B}{q_4} \qquad V_4 = -\frac{B}{q_4}\ .$$

Soient (H) et (H^*) les groupes[1] homogènes d'ordre 4, polaires l'un de l'autre, engendrés respectivement par les U_i et les V_i.

---

(1) le mot "groupe"appliqué à H et H^* est commode, et d'ailleurs traditionnel cf. E. Goursat :"Leçons sur les équations aux dérivées partielles du 1er ordre" pp. 410 et suiv. (2ème édition). Il faut pourtant remarquer que son emploi constitue un abus de langage , car la loi de composition interne (définie par la parenthèse de Poisson) dont chacun de ces ensembles est muni n'est pas associative.

Toutes les parenthèses (U_i, U_j) sont nulles $(i,j = 1,\ldots,4)$, à l'exception de $(U_2,U_3) = -(U_3, U_2) = U_4$.

Le rang du tableau d'élément général (U_i, U_j) étant égal à 2, le nombre des fonctions distinguées de H ou H^* est égal à 2. Ces fonctions sont d'ailleurs en évidence : U_1 et U_4.

Il s'agit d'abord de trouver pour H et H^* des bases canoniques, de la forme :

$$Y_2 \quad Q_2 \quad Y_1 \quad Q_4 \quad \text{pour } H$$

$$Y_3 \quad Q_3 \quad Y_1 \quad Q_4 \quad \text{pour } H^*$$

où les Y_i et Q_j sont des fonctions homogènes[1] de degrés 0 et 1 respectivement, vérifiant :

$(Y_i,Y_k) = 0, \quad (Q_i, Q_k) = 0, \quad (Q_i, Y_k) = \delta_{ik}$ (Kronecker).

La fonction U_1 étant distinguée et homogène de degré 0, nous prendrons

$$Y_1 = U_1$$

La fonction q_4 étant distinguée (au même titre que U_4) et homogène de degré 1 nous prendrons :

$$Q_4 = q_4$$

La fonction U_2 étant homogène de degré 0, nous prendrons ;

$$Y_2 = U_2.$$

Reste à déterminer Q_2, de degré 1, telle que :

$$(Q_2\, Y_2) = 1.$$

Posons ; $Q_2 = U_4^{-1}\, \psi(U_1\, U_2\, U_3)$.

La condition $(Q_2\, Y_2) = 1$ s'écrit :

$$\frac{-\partial\psi}{\partial U_3} = 1.$$

On peut donc prendre : $Q_2 = \dfrac{-U_3}{U_4}$.

Pour le groupe H^*, nous prendrons de même :

$$Q_4 = q_4, \qquad Y_3 = V_3.$$

---

(1) Quand on parlera de fonction homogène, il s'agira toujours d'homogénéité par rapport aux q_i.

Et pour déterminer Q_3 , on a la condition $(Q_3\ Y_3) = 1$, qui est satisfaite en prenant :

$$Q_3 = \frac{-V_3}{V_4} .$$

On a donc, pour H et H^* les bases canoniques suivantes :

Pour H :
$$\begin{cases} Y_2 = \dfrac{-q_2}{q_4} + b_{22}\, y_2 + b_{23}\, y_3 + a_{12}\, \dfrac{q_1}{q_4} \\ Q_2 = \dfrac{1}{B}\left[- q_3 + a_{13}\, q_1 + q_4\,(b_{32}\, y_2 + b_{33}\, y_3)\right] \\ Y_1 = y_1 + A(y_2, y_3) \\ Q_4 = q_4 \end{cases}$$

Pour H^* :
$$\begin{cases} Y_3 = \dfrac{-q_3}{q_4} + b_{23}\, y_2 + b_{33}\, y_3 + a_{13}\, \dfrac{q_1}{q_4} \\ Q_3 = \dfrac{1}{B}\left[- q_2 + a_{12}\, q_1 + q_4(b_{22}\, y_2 + b_{32}\, y_3)\right] \\ Y_1 = y_1 + A \\ Q_4 = q_4 . \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de trouver pour le groupe d'ordre 8, une base contenant les fonctions Y_1, Y_2, Y_3, Q_2, Q_3, Q_4 .

Remarquon d'abord que les 6 fonctions

(1) $\qquad Y_2 \quad Q_2 \quad Y_3 \quad Q_3 \quad Y_1 \quad Q_4$

engendrent un groupe d'ordre 6[1], soit K, admettant pour fonctions distinguées Y_1 , Q_4.

Nous allons compléter l'ensemble (1) au moyen de deux nouvelles fonctions Y_4 et Q_1.

---

(1) en effet, la parenthèse de deux fonctions quelconques de cet ensemble est, soit nulle, soit égale à ± 1. De plus, ces fonctions sont distinctes : d'abord toute relation qui ne contiendrait que $Y_2\ Q_2\ Y_1\ Q_4$ est impossible . Si on avait : $Y_3 = \varphi(Y_2\ Q_2\ Y_1\ Q_4\ Q_3)$ on en déduirait :

$(Y_3\ Q_3) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y_2}(Y_2\ Q_3) + .. + \dfrac{\partial\varphi}{\partial Q_4}(Y_2\ Q_4) = 0$, contrairement à l'hypothèse.

A) Recherche de Y_4

Considérons l'ensemble obtenu en supprimant Q_4 de (1) :

(2) $$Y_2\ Q_2\ Y_3\ Q_3\ Y_1\ .$$

Ces fonctions engendrent un groupe homogène d'ordre 5, soit L, dont le groupe polaire L^*, homogène d'ordre 3, contient Y_1 et Q_4.

Soit : $$Y_1 \quad N \quad Q_4$$

une base de ce groupe polaire, dans lequel la fonction complémentaire N est homogène de degré 0. Remarquons que Q_4 n'est pas une fonction distinguée de L^*, car elle ne peut s'exprimer au moyen des fonctions (2), l'ensemble (1) étant composé de fonctions distinctes. On peut donc trouver dans L^* une fonction Y_4, homogène de degré 0, telle que : $(Q_4\ Y_4) = 1$. Pour cela, on cherche d'abord une troisième fonction composant, avec Y_1 et Q_4, une base de L^*. On trouve facilement la fonction suivante :

$$N \equiv By_4 + (b_{32}\ y_2 + b_{33}\ y_3)\ \left(\frac{q_2 - a_{12}\ q_1}{q_4}\right) + (b_{22}\ y_2 + b_{32}\ y_3)\ \left(\frac{q_3 - a_{13}\ q_1}{q_4}\right)$$

$$- \frac{(q_2 - a_{12}\ q_1)(q_3 - a_{13}\ q_1)}{q_4^2} - (b_{22}\ b_{33} + b_{23}\ b_{32})\ y_2 y_3 .$$

$$- \frac{1}{2}\ (b_{32} + b_{23})\ (b_{22}\ y_2^2 + b_{33}\ y_3^2)\ .$$

Cherchons maintenant Y_4, de la forme : $Y_4 = \varphi(Y_1, N)$, vérifiant : $(Q_4, Y_4) = 1$.

En développant cette condition, on trouve : $(Q_4, N)\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial N} = 1$.

Mais $(Q_4, N) = B$.

On peut donc prendre : $Y_4 = \dfrac{N}{B}$.

Remarquons que l'ensemble obtenu en ajoutant à (2) les fonctions Y_4 et Q_4, c'est-à-dire l'ensemble :

(3) $$Y_2\ Q_2\ Y_3\ Q_3\ Y_4\ Q_4\ Y_1$$

engendre un groupe, homogène, d'ordre 7, admettant pour fonction distinguée Y_1. (on le voit comme pour (1)). La recherche de Q_1, à partir de (3), s'effectue comme celle de Y_4, à partir de (1).

B) Recherche de Q_1

Considérons l'ensemble obtenu en supprimant Y_1 de (3) c'est-à-dire l'ensemble :

(4) $$Y_2\ Q_2\ Y_3\ Q_3\ Y_4\ Q_4$$

Ces fonctions engendrent un groupe homogène d'ordre 6, soit R, dont le groupe polaire R^*, d'ordre 2, contient Y_1. Soit Y_1, Z une base de ce groupe polaire. Y_1 n'est pas distinguée : on le voit comme plus haut pour Q_4 dans L^*. Donc il est impossible que Z soit homogène de degré 0.(1)

On peut donc trouver dans R^*, une fonction Q_1, homogène de degré 1, telle que : $(Q_1\ Y_1) = 1$.
Pour cela écrivons les équations aux dérivées partielles du groupe R^*. On trouve le système complet suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} - a_{12}\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_3} - a_{13}\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial q_3} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial q_4} = 0,$$

auquel est associé le système aux différentielles totales :

$$dy_1 = -a_{12}\,dy_2 - a_{13}\,dy_3$$

$$dq_1 = 0$$

admettant les deux intégrales premières distinctes :

$$y_1 + A \quad \text{et} \quad q_1.$$

On peut donc prendre : $Q_1 \equiv q_1$, car on a : $(q_1\ Y_1) = 1$.

La transformation de contact qui permettra de ramener l'équation de Monge-Ampère à la forme canonique est donc la suivante :

$$X_1 = x_1 + A(x_2, x_3)$$
$$X_2 = p_2 + b_{22}\,x_2 + b_{23}\,x_3 - a_{12}\,p_1$$

---

(1) cf. E. Goursat , Leçons ... 1er ordre , p. 446.

$$X_3 = p_3 + b_{23}\, x_2 + b_{33}\, x_3 - a_{13}\, p_1$$

$$Z = z + \frac{1}{B}\left\{\begin{array}{l} (b_{32}\, x_2 + b_{33}\, x_3)(a_{12}\, p_1 - p_2) + (b_{22}\, x_2 + b_{32}\, x_3)(a_{13}\, p_1 - p_3) \\ -(p_2 - a_{12}\, p_1)(p_3 - a_{13}\, p_1) - (b_{22}\, b_{33} + b_{23}\, b_{32}) x_2\, x_3 \\ - 1/2\, (b_{32} + b_{23})\, (b_{22}\, x_2^2 + b_{33}\, x_3^2) \end{array}\right\}$$

$$P_1 = p_1$$

$$P_2 = -\ 1/B\, (p_3 - a_{13}\, p_1 + b_{32}\, x_2 + b_{33}\, x_3)$$

$$P_3 = -\ 1/B\, (p_2 - a_{12}\, p_1 + b_{22}\, x_2 + b_{32}\, x_3)$$

et l'équation transformée est : $P_{23} = 0$, dont la solution générale est donnée par :

$$(5) \qquad Z = \varphi(X_1\, X_2) + \psi(X_1\, X_3)\,,$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires de 2 arguments, d'où découle

$$P_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + \frac{\partial \psi}{\partial X_1}\ ;\quad P_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}\ ;\quad P_3 = \frac{\partial \psi}{\partial X_3}\ .$$

Nous allons en déduire la solution générale de l'équation initiale

Posons : $X_1 = \alpha$, $X_2 = \beta$, $X_3 = \gamma$.

Des équations :

$$\beta = b_{22}\, x_2 + b_{23}\, x_3 + p_2 - a_{12}\, p_1$$

$$\gamma = b_{23}\, x_2 + b_{33}\, x_3 + p_3 - a_{13}\, p_1$$

$$-B\varphi'_\beta = b_{32}\, x_2 + b_{33}\, x_3 + p_3 - a_{13}\, p_1$$

$$-B\psi'_\gamma = b_{22}\, x_2 + b_{32}\, x_3 + p_2 - a_{12}\, p_1$$

on tire : x_2 , x_3, $p_2 - a_{12}\, p_1$, $p_3 - a_{13}\, p_1$ en fonction de α, β, γ :

$$x_2 = -\ \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{B}$$

$$x_3 = -\ \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \frac{\beta}{B}$$

$$p_2 - a_{12}\, p_1 = \beta + b_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\gamma}{B}\right) + b_{23}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{\beta}{B}\right)$$

$$p_3 - a_{13}\, p_1 = \gamma + b_{23}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\gamma}{B}\right) + b_{33}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{\beta}{B}\right)$$

En portant ces valeurs dans la relation (5) on trouve, après quelques simplifications :

$$z = \varphi(\alpha, \beta) + \psi(\alpha, \gamma) - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \frac{\beta \gamma}{B} - \frac{1}{2} b_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\gamma}{B}\right)^2$$

$$- \frac{1}{2} b_{33}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{\beta}{B}\right)^2 - b_{23}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\gamma}{B}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{\beta}{B}\right)$$

formule, qui, jointe à :

$$x_1 = \alpha - A(x_2, x_3)$$

$$x_2 = - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{B}$$

$$x_3 = - \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \frac{\beta}{B}$$

donne la solution générale de l'équation de Monge-Ampère considérée.

100 - n-h INTEGRALES PREMIERES , DONT n - h - 1 COMMUNES AUX DEUX SYSTEMES ($1 \leq h \leq n - 1$).

Lorsqu'on connaît moins de n intégrales premières des systèmes caractéristiques, on ne peut ramener l'équation à l'une des formes canoniques indiquées par E. Goursat.

Cependant, on a le résultat suivant :

Théorème : Si l'on connaît n-h intégrales premières distinctes de l'un ou l'autre des systèmes caractéristiques , dont n - h - 1 communes aux deux, on peut, par une transformation de contact, ramener l'équation à la forme :

$$\left\| a_{kl} + \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, p_{il} \right\| = 0$$

($k, l = 1,\ldots,h$) , où les a_{kl} et b_{ki} ne contiennent que les dérivées partielles du 1er ordre. La démonstration répète celle du numéro 98. En effet, les n - h-1

intégrales premières communes aux deux systèmes sont deux à deux en involution et la dernière intégrale, non comprise dans celles-ci, est en involution avec chacune d'elles. Donc on a, pour l'un des systèmes caractéristiques, un système de n-h intégrales premières deux à deux en involution . On peut donc employer la même transformation de contact qu'au numéro cité. L'équation transformée a donc bien la forme indiquée ci-dessus. Il est à noter qu'on ne peut pas pousser la simplification aussi loin qu'au n° 98, car les systèmes caractéristiques, cette fois , sont distincts.

CHAPITRE III

METHODE D'INTEGRATION DE MONGE - JACOBI

Le but de ce chapitre est de signaler une classe d'équations de Monge-Ampère dont la résolution complète se ramène à l'intégration d'une équation aux différentielles totales. Auparavant, nous indiquerons comment peut s'obtenir, théoriquement, la solution générale d'une équation de Monge-Ampère lorsqu'on connaît, pour une équation intermédiaire, dépendant d'une fonction arbitraire de n-1 arguments, une intégrale complète de Lie

Nous adopterons la notation : $\frac{\partial z}{\partial x^i} = p_i$ ou p^i , et nous poserons :

$$\omega \equiv dz - \sum_{i=1}^{n} p^i dx^i .$$

PARAGRAPHE UN : INTEGRALES DE LIE

101 - DEFINITION DES INTEGRALES DE LIE

Une variété à n dimensions de l'espace $(x^1,\dots,x^n,z,p^1,\dots,p^n)$, solution de : $\omega = 0$,

et vérifiant en outre :

$$(1) \qquad F(x^1,\dots,x^n, p^1,\dots,p^n, z) = 0$$

est dite une intégrale de Lie de l'équation aux dérivées partielles : $F = 0$[1].

Soit :
$$x^i = f^i(u^1,\dots,u^n)$$
$$z = \varphi(u^1,\dots,u^n)$$
$$p^i = \psi^i(u^1,\dots,u^n)$$

une telle intégrale.

Si le jacobien $\frac{D(f^1,\dots,f^n)}{D(u^1,\dots,u^n)}$ n'est pas nul, c'est une intégrale au sens ordinaire, car on peut prendre $x^1,\dots,x^n$ comme variables indépendantes.

---

(1) en fait, nous ne considérerons que des intégrales de Lie sur lesquelles l'une au moins des lettres x^i, n'est pas constante.

Supposons, au contraire, que le tableau d' élément général $\frac{\partial f^i}{\partial u^j}$ soit de rang h, avec : $0 < h < n$.
Il existe donc , entre les x^i, n-h relations distinctes, indépendantes des u^i. Pour fixer les idées, admettons que l'on ait :

$$x^\gamma = F^\gamma (x^1,\dots,x^h),$$

avec : $\gamma = h+1,\dots,n$.

On démontre alors[1] que l'intégrale de Lie considérée admet la représentation suivante ;

$$(2) \qquad x^\gamma = F^\gamma(x^1,\dots,x^h) \qquad (\gamma = h+1,\dots,n)$$

$$(3) \qquad z = \Phi(x^1,\dots,x^h)$$

$$p^\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} - \sum_{\gamma=h+1}^{n} p^\gamma \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 1,\dots,h).$$

Les équations (2) et (3) définissent le support ponctuel de l'intégrale de Lie, lequel, on le voit, est de dimension h , Remarquons aussi, qu'une intégrale de Lie est déterminée dès qu'on connaît son support ponctuel.

On peut se demander quel intérêt présentent ces intégrales, lorsque le support ponctuel est de dimension inférieure à n. Le théorème suivant donne la réponse à cette question en montrant comment d'une intégrale de Lie dépendant de n-1 paramètres on peut déduire une intégrale ordinaire de (1).

102 - INTEGRALE DE LIE DEPENDANT DE n-1 PARAMETRES

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'intégrales de Lie dépendant de n-1 paramètres. Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments de contact appartenant à l'une ou l'autre intégrale de cette famille.

On peut , de la famille $\mathcal{F}$, déduire, par des dérivations et des éliminations seulement, une intégrale ordinaire dont tous les éléments de contact appartiennent à $\mathcal{E}$.

Dans le cas où $\mathcal{F}$ est composée d'intégrales ordinaires, l'intégrale qu'on en déduit n'est autre que l'enveloppe des intégrales de la famille donnée. Le calcul est classique. Si la famille $\mathcal{F}$ a pour équation :

---

(1) cf. E. Goursat : Leçons sur l'intégration des éq. aux d.p. du 1er ordre, p. 316.

$$z = \Phi(x^1,\dots,x^n, a^1,\dots,a^{n-1}),$$

"l'enveloppe " des variétés de cette famille , définie par :

$$z = \Phi , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a^1} = 0 , \dots , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a^{n-1}} = 0$$

est encore une solution de l'équation considérée, et l'on sait que , en tout point de l'enveloppe pour lequel $a^i = a^i_o$ $(i = 1,\dots,n-1)$, cette dernière est tangente à la surface de la famille $\mathcal{F}$ qui correspond à ces mêmes valeurs des paramètres.

Insistons un peu plus sur le cas où le support ponctuel de chaque intégrale de $\mathcal{F}$ est de dimension h strictement positive, mais inférieure à n.(1)

A/ Supposons d'abord $h > 1$.

Etant donnée l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre :

$$(1) \qquad F(x^1,\dots,x^n, p^1,\dots,p^n, z) = 0,$$

soit :

$$(2) \quad \begin{cases} z = \psi(x^{g+1},\dots,x^n, \quad a^1,\dots,a^{n-1}) \\ x^\alpha = \psi^\alpha(x^{g+1},\dots,x^n; a^1,\dots,a^{n-1}) \qquad (\alpha = 1,\dots,g) \end{cases}$$

avec $0 < g = n-h < n-1$,

(valeurs décrites par les indices muets dans ce numéro :

$\alpha, \beta = 1,\dots,g$; $\gamma = g+1,\dots,n-1$; $\rho = g+1,\dots, n$;

$i,j = 1,\dots,n-1$; $k = 1,\dots, n$.)

le support ponctuel d'une intégrale de Lie dépendant de n-1 paramètres .

Supposons :
$$\frac{D(\psi^1,\dots,\psi^g)}{D(a^1,\dots,a^g)} \not\equiv 0,$$

et posons
$$\frac{D(\psi, \psi^1,\dots,\psi^g)}{D(a^\gamma, a^1,\dots,a^g)} \equiv \psi^\gamma .$$

Si l'élimination de : $a^1,\dots,a^{n-1}$ entre les relations :

$$(3) \qquad z = \psi , \quad x^\alpha = \psi^\alpha , \quad \psi^\gamma = 0$$

---

(1)La proposition à démontrer généralise le théorème suivant, relatif aux équations du 1er ordre à 2 variables indépendantes: Toute famille à 1 paramètre de courbes caractéristiques (qui sont les supports d'intégrales de Lie) engendre une surface intégrale.

est possible (c'est le cas général), elle fournit une solution ordinaire de l'équation $F = 0$.

On pourrait rattacher ce théorème aux résultats énoncés par Mr. Goursat dans ses"Leçons sur les équations aux d.p. du 1er ordre , pp. 322-323 et p. 395. On peut aussi donner une démonstration directe. Pour cela, nous supposerons que le déterminant d'élément général

$$\psi^i_j = \frac{\partial \psi^i}{\partial a^j} \qquad \text{n'est pas nul.}$$

On peut donc résoudre les équations : $x^\alpha = \psi^\alpha$, $\psi^\gamma = 0$ par rapport à $a^1,\dots,a^{n-1}$.

Soient : $a^i = \theta^i (x^1,\dots,x^n)$

les fonctions ainsi obtenues.

Nous poserons $\dfrac{\partial \theta^i}{\partial x^k} = \theta^i_k$.

La variété obtenue en éliminant les a^i entre les équations (3) a donc pour équation :

$$(4) \qquad z = \psi(x^{g+1},\dots,x^n, \theta^1,\dots,\theta^{n-1}) \equiv f(x^1,\dots,x^n) .$$

On a, sur cette variété :

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}\,\theta^i_\alpha , \qquad \frac{\partial f}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}\,\theta^i_\rho .$$

Sur l'intégrale de Lie, de support ponctuel (2), on a : $\omega = 0$. Donc les $p^\rho = \dfrac{\partial z}{\partial x^\rho}$ sont donnés en fonction des p^α, qui restent arbitraires , par :

$$p^\rho = \frac{\partial \psi}{\partial x^\rho} - \sum_{\alpha=1}^{g} p^\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\rho} .$$

Il suffit donc, pour démontrer que l'élément de contact de (4) ayant pour support le point $(x^1,\dots,x^n, z)$ appartient à $\mathcal{C}$ (donc est un élément de contact intégral), de vérifier l'identité suivante, en les variables $x^1,\dots,x^n$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}\,\theta^i_\alpha\,\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}\,\theta^i_\rho \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$$(5) \qquad \frac{-\partial \psi}{\partial \theta^i}\,\theta^i_\alpha\,\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}\,\theta^i_\rho .$$

Les équations : $\psi^{\gamma} = 0$, jointes à l'hypothèse :

$$\frac{D(\psi^1,\ldots,\psi^g)}{D(a^1,\ldots,a^g)} \not\equiv 0,$$

expriment que la forme linéaire en les θ^i_k : $\frac{\partial\psi}{\partial\theta^i}\,\theta^i_k$ est liée linéairement aux formes $\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\theta^i}\,\theta^i_k$.

Il existe donc des fonctions $\lambda_1,\ldots,\lambda_g$ telles que :

$$(6) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta^i}\,\theta^i_k = \lambda_1\frac{\partial\psi^1}{\partial\theta^i}\,\theta^i_k + \ldots + \lambda_g\frac{\partial\psi^g}{\partial\theta^i}\,\theta^i_k .$$

Tenant compte de (6) dans (5), on voit que l'identité à vérifier peut s'écrire :

$$(7) \qquad -\lambda_\beta\frac{\partial\psi^\beta}{\partial\theta^i}\,\theta^i_\alpha\,\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\rho} = \lambda_\alpha\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\theta^i}\,\theta^i_\rho .$$

Or, on a , en dérivant partiellement la deuxième équation de (3) :

$$1 = \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\theta^i}\,\theta^i_\alpha ,$$

et, pour α' choisi, parmi les g premiers entiers, mais différent de α :

$$0 = \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\theta^i}\,\theta^i_{\alpha'} .$$

De plus,

$$0 = \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\theta^i}\,\theta^i_\rho + \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\rho} .$$

Il en résulte que l'identité (7) à vérifier se réduit à :

$$-\lambda_\alpha\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\rho} = -\lambda_\alpha\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\rho} ,$$

ce qui est clair . Le théorème est donc démontré, dans l'hypothèse envisagée.

B/ Etant donnée l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre :

$$F(x^1,\ldots,x^n,\ p^1,\ldots,p^n,\ z) = 0,$$

soit :

$$\begin{cases} z = \psi\,(x^n,\ a^1,\ldots,a^{n-1}) \\ x^\alpha = \psi^\alpha(x^n,\ a^1,\ldots,a^{n-1}) \qquad (\alpha = 1,\ldots,n-1) \end{cases}$$

le support ponctuel à 1 dimension, d'une intégrale de Lie dépendant de n-1 paramètres.

Supposons :

$$\frac{D(\psi^1, \ldots, \psi^{n-1})}{D(a^1, \ldots, a^{n-1})} \not\equiv 0 .$$

En éliminant $a^1, \ldots, a^{n-1}$, entre les relations

$$z = \psi \quad , \quad x^\alpha = \psi^\alpha \ ,$$

on obtient une solution ordinaire de l'équation $F = 0$.

Démonstration analogue à la précédente , avec des simplifications évidentes.

103 - REMARQUES SUR LE THEOREME PRECEDENT

Il y a une différence entre les hypothèses A et B du numéro précédent, toute à l'avantage de la seconde.

Dans le premier cas, en effet, c'est-à-dire lorsque le support ponctuel de la famille d'intégrales de Lie considérée est de dimension supérieure à 1, la recherche de la solution ordinaire déduite de cette famille exige des dérivations et l'élimination de paramètres, exactement comme la recherche de l'enveloppe d'une famille de courbes ou de surfaces, dans l'espace ordinaire. Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque le support ponctuel est de dimension 1, cette solution ordinaire s'obtient sans dérivation, simplement en éliminant des paramètres, exactement comme on obtient dans l'espace ordinaire, l'équation d'une surface engendrée par une famille de courbes.

L'hypothèse B est donc plus favorable que l'autre. Cela se remarquera encore par la suite.

104 - INTEGRALE COMPLETE DE LIE

Une intégrale complète de Lie est une intégrale de Lie dépendant de n constantes arbitraires.

Théoriquement, on peut, par des dérivations et des éliminations , déduire d'une telle intégrale complète l'intégrale générale ordinaire de l'équation étudiée. En effet, soient $a^1, \ldots, a^n$ les constantes arbitraires . Il suffit de poser, par exemple, $a^n = \varphi(a^1, \ldots, a^{n-1})$, φ étant une fonction arbitraire, et d'appliquer le théorème du n° 102.

A ce sujet , une remarque s'impose :

Si le support ponctuel de l'intégrale complète de Lie est de dimension supérieure à 1, on ne pourra pas donner la solution générale sous forme explicite. En effet, l'application de la méthode du numéro cité exige d'abord des dérivations relatives aux a^i. Ce calcul fera apparaître les dérivées partielles de la fonction φ. Tant que cette fonction n'est pas précisée, il est bien clair qu'on ne pourra pas éliminer les paramètres $a^1,\ldots,a^{n-1}$. Cependant, il sera généralement possible de résoudre le problème de Cauchy, pour telles conditions initiales données. C'est pourquoi, il n'est pas inexact de dire que, d'une intégrale complète de Lie, on peut déduire la solution générale de l'équation. Si maintenant, on suppose le support ponctuel de cette intégrale de dimension 1, toute difficulté disparaît. En effet, nulle dérivation n'est nécessaire.

L'intégrale[x] de Lie elle-même, où l'on fait de l'un des paramètres une fonction arbitraire des autres, donne une représentation paramétrique de l'intégrale générale.

x complète

105 - THEOREME FONDAMENTAL DE LIE

Le résultat fondamental de Lie, dans la question qui nous occupe, est le suivant : Soient $u^1,\ldots,u^{n+1}$, n+1 fonctions distinctes des x^i, z, p^i, deux à deux en involution.

$a^1,\ldots,a^{n+1}$ étant des constantes quelconques, le système :

$$u^i = a^i \qquad (i = 1,\ldots,n+1)$$

représente, si l'on considère l'une des constantes, soit a^{n+1}, comme donnée, et les autres comme arbitraires, une intégrale complète de Lie de l'équation : $u^{n+1} = a^{n+1}$.

cf. E. Goursat, Leçons sur les équations aux d°p. du 1er ordre, p. 395.

Nous allons chercher à définir la dimension du support ponctuel de cette intégrale complète.

Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant.

106 - LEMME ALGEBRIQUE

Soit dans un espace vectoriel C^n sur les nombres complexes, une variété linéaire V_h, passant par l'origine, définie par un système de : $p = n-h$ formes indépendantes : $\omega^1 = 0, \ldots, \omega^p = 0$.

Dans V_h, choisissons h vecteurs indépendants $\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_h$; et considérons la p-forme :

$$\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p$$

élément de $\overset{p}{\wedge} (C^n)^*$, et le h-vecteur :

$$t = \vec{b}_1 \wedge \dots \wedge \vec{b}_h ,$$

élément de $\overset{p}{\wedge} C^n$.

Dans une base de C^n, soient a_i^k les coordonnées de ω^k et b_j^i celles de $\vec{b}_j$. Désignons par A et B les tableaux d'éléments généraux respectifs a_i^k et b_j^i (1). $(k = 1,\dots,p ; j = 1,\dots,h)$.

Les composantes de ω sont les déterminants $a_{i_1\dots i_p}$ formés avec les diverses lignes $i_1\dots i_p$ du tableau A ; celles de t sont les déterminants $b^{j_1\dots j_h}$ formés avec les diverses colonnes $j_1\dots j_h$ du tableau B.

Soit $i_1\dots i_p\, j_1\dots j_h$ une permutation des n premiers entiers $(i_1 < \dots < i_p ; j_1 < \dots < j_h)$.

Les coordonnées $a_{i_1\dots i_p}$ et $b^{j_1\dots j_h}$ sont en même temps nulles ou différentes de zéro(2).

Nous allons voir ce qu'il advient lorsque ces deux coordonnées sont nulles. Pour simplifier, nous raisonnerons sur $a_{1\dots p}$ et $b^{p+1,\dots,p+h}$. Les matrices $(a_k^{k'})$ et $(b_{j'}^{j+p})$ $(k,k' = 1,\dots,p ; j,j' = 1,\dots,h)$ seront notées respectivement A_1 et B_1, et leurs rangs r et s. Nous allons établir la relation :

$$p - r = h - s .$$

Supposons $r = p - \alpha$ avec $0 < \alpha < p$.

On en déduit qu'il existe, entre les ω^k, α relations distinctes, par exemple :

---

(1) L'indice inférieur se rapporte toujours à la ligne.

(2) Si, au lieu de C^n, on introduit l'espace euclidien réel E^n, on voit que t n'est autre, à un coefficient près, différent de zéro, que le tenseur polaire de ω.
cf. A.Lichnerowicz, Algèbre et Analyse linéaire, page 150.

$$\omega^p - f_1(\omega^1,\dots,\omega^{p-\alpha}) \equiv \varphi_1(x^{p+1},\dots,x^n)$$

$$\omega^{p-1} - f_2(\omega^1,\dots,\omega^{p-\alpha}) \equiv \varphi_2(x^{p+1},\dots,x^n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\omega^{p-\alpha+1} - f_\alpha(\omega^1,\dots,\omega^{p-\alpha}) \equiv \varphi_\alpha(x^{p+1},\dots,x^n)$$

les f et φ étant des formes linéaires en les arguments indiqués, et les φ_i étant indépendantes (sans quoi les ω^k seraient liés par une relation au moins, ce qui est contraire à l'hypothèse). Comme les φ ne contiennent que $n - p = h$ variables, on a donc nécessairement : $\alpha \leqslant h$. En raisonnant sur B_1 comme on l'a fait sur A_1, on démontre de même : $\alpha \leqslant p$.

Soit $q = \text{mini}\,(h, p)$. Il faut donc :

$$0 < \alpha \leqslant q .$$

Cela étant, montrons que si A_1 est de rang $p - \alpha$, B_1 est au plus de rang $h - \alpha$.

En effet, $\varphi_1,\dots,\varphi_\alpha$ étant nulles sur $V_{h'}$ α relations distinctes existent entre les colonnes de B_1.

Démontrons maintenant la réciproque : si B_1 est de rang $h - \beta$, avec $0 < \beta \leqslant q$, A_1 est au plus de rang $p - \beta$.

Par hypothèse, β relations distinctes existent entre les $\vec{b_j}$, par exemple :

$$\vec{b_h} - g_1(\vec{b_1},\dots,\vec{b_{h-\beta}}) \equiv \varphi_1(\vec{e_1},\dots,\vec{e_p}) \equiv \vec{\varphi_1}$$

$$\vdots$$

$$\vec{b_{h-\beta+1}} - g_\beta(\vec{b_1},\dots,\vec{b_{h-\beta}}) \equiv \varphi_\beta(\vec{e_1},\dots,\vec{e_p}) \equiv \vec{\varphi_\beta};$$

où $\vec{e_1},\dots,\vec{e_p}$ désignent les p premiers vecteurs de la base de C^n, et où les fonctions g et φ sont linéaires, les β vecteurs $\vec{\varphi_1},\dots,\vec{\varphi_\beta}$ étant indépendants.

Sur $V_{h'}$ on a : $\omega^k(\vec{\varphi_1}) = 0,\dots,\omega^k(\vec{\varphi_\beta}) = 0 \quad (k = 1,\dots,p)$.

D'où on déduit que le rang de A_1 est au plus égal à $p-\beta$. En conclusion : si A_1 est de rang $p-\alpha$, avec : $0 < \alpha \leqslant q$, B_1 est de rang $h-\alpha$.

On a donc bien : $p - r = h - s \leq q$

avec : r = rang de A_1, s = rang de B_1, q = mini (p, h) .

Remarque : Le résultat est indépendant des formes linéaires ω^k et des vecteurs $\vec{b}_j$ choisis pour définir V_h.

En effet, remplaçons le système $\omega^k = 0$ par un système algébriquement équivalent : $\varphi^k = 0$, avec :

$$\varphi^k \equiv c^k_l \; \omega^l \qquad (k, l = 1,\dots,p)$$

la matrice C, d'élément général c^k_l , étant régulière .

On a : $\varphi^k \equiv a^k_i \; x^i$ avec $a^k_i = a^l_i \, c^k_l$.

A_1 est remplacée par : $A_1 C$, qui a même rang que A_1, puisque C est régulière.

De même changer le système des vecteurs $\vec{b}_j$ en un autre système de vecteurs indépendants de V_h a pour effet de changer B_1 , en une matrice B'_1 de même rang

107 - APPLICATION AUX VARIETES DIFFERENTIABLES

Soit une variété différentiable V_n, rapportée aux coordonnées locales x^i.

Donnons-nous sur V_n p différentielles totales linéairement distinctes : $du^1,\dots,du^p$, et soit V_h, de dimension $h = n - p$, une variété plongée dans V_n, vérifiant le système : $du^k = 0$ $(k = 1,\dots,p)$.

Soit $t^1,\dots,t^h$ un système de coordonnées locales admissibles sur V_h , auxquelles correspond la base naturelle :

$$\frac{d\vec{x}}{dt^1} , \dots , \frac{d\vec{x}}{dt^h}$$

de l'espace vectoriel tangent à V_h en un point donné . Posons : $du^k \equiv u^k_i \, dx^i$

$\frac{\partial x^i}{\partial t^j} = x^i_j$, et soient A_1 et B_1 les matrices d'éléments généraux respectifs $(u^{k'}_{k+h})$ et $(x^{j'}_j)$ $(k,k' = 1,\dots,p \; ; \; j,j' = 1,\dots,h)$

r et s leurs rangs.

On a la relation suivante , où q désigne le minimum de p et h :

$$p - r = h - s \leq q.$$

Remarque : le résultat n'est pas modifié si on remplace le système des

équations $du^k = 0$ par un système algébriquement équivalent , ou le système des (t^j) par tout autre système admissible de coordonnées locales sur V_h.

108 - DIMENSION DU SUPPORT PONCTUEL DE L'INTEGRALE COMPLETE

Revenons aux n+1 fonctions en involution $u^1,\dots,u^{n+1}$, et à l'intégrale complète de Lie de : $u^{n+1} = a^{n+1}$ donnée par : $u^i = a^i$ $(i = 1,\dots,n+1)$

Soit V_n la variété à n dimensions de l'espace (x^i, z, p^i) ainsi définie.

Remplaçons dans le numéro précédent :

n par 2n + 1

p par n +1

h par n

(on a donc : $q = n$).

D'après ce qu'on a vu au n° 101, la dimension d du support ponctuel est égale au rang de la matrice désignée par B_1, au numéro précédent (c'est-à-dire avec les notations de ce numéro, à s).

Donc r désignant le rang de la matrice qui remplace A_1, c'est-à-dire de la matrice :

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial z} , \frac{\partial u^i}{\partial p^1} , \dots , \frac{\partial u^i}{\partial p^n}\right) \quad (i = 1, \dots , n+1)$$

$$d = r - 1 .$$

109 - INTEGRALE INTERMEDIAIRE D'UNE EQUATION DE MONGE-AMPERE

Si $u(x^1,\dots,x^n , p^1,\dots,p^n, z)$ est une intégrale première d'un système caractéristique , l'équation de Monge-Ampère admet toutes les solutions (non singulières) de l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre :

$$u(x^1,\dots,x^n ; p^1,\dots,p^n; z) = 0 .$$

(cf. E. Goursat, Mémoire 1899, p.13)

Une telle équation est dite : équation (ou intégrale) intermédiaire de l' équation de Monge-Ampère .

Si l'on dispose d'une intégrale intermédiaire u dépendant d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments , il suffit de résoudre complètement l'équation $u = 0$ pour avoir la solution générale de l'équation de Monge-Ampère.

110 - EQUATION COMPLETEMENT INTEGRABLE PAR LA METHODE DE MONGE-JACOBI

La méthode de Monge-Jacobi suppose que l'on connaisse une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments. Elle a pour objet de trouver, pour l'équation intermédiaire correspondante, une intégrale complète de Lie, en appliquant le théorème fondamental rappelé au n° 105.

Cette méthode suppose donc essentiellement que l'on connaisse $n+1$ fonctions distinctes des x^i, z, p^i , deux à deux en involution, parmi lesquelles figure une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments . S'il en est ainsi , et seulement dans ce cas, nous dirons que l' équation de M.A. est complètement intégrable par la méthode de Monge

On voit tout de suite une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi : c'est que l'un des systèmes caractéristiques au moins admette n intégrales premières distinctes. En effet, c'est à cette condition seulement que l'on pourra disposer d'une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments.

Pour étudier de plus près les équations complètement intégrables par la méthode de Monge , envisageons successivement deux cas, suivant que les systèmes caractéristiques sont confondus ou distincts.

PARAGRAPHE DEUX : SYSTEMES CARACTERISTIQUES CONFONDUS

L'intégrabilité complète par la méthode de Monge suppose l'existence de n intégrales premières distinctes. S'il y en a n, il y en a n+1 (n°87) et le système est complètement intégrable. Telle sera notre hypothèse.

111 - SYSTEME NORMAL D'INTEGRALES PREMIERES

a) Avant de définir ce que nous entendons par système normal d'intégrales premières, établissons un lemme algébrique.

Soit A une matrice carrée régulière d'ordre n , d'élément général (a_i^j) (1) . On peut trouver une matrice régulière B, de même ordre, telle que tous les éléments de la première colonne de BA soient différents de zéro.

En effet, soit b_i^j l'élément général de B.

L'élément général de BA est : $b_i^k a_k^j$.

L'un au moins des a_j^1 est différent de zéro. Supposons $a_1^1 \neq 0$.

Il s'agit de trouver des b_i^k tels que $b_i^k a_k^1 \neq 0$ $(i = 1,\ldots,n)$.

On prendra : $b_k^1 = 1$ quel que soit k, et , pour $j > 1$, $k \neq j$, $b_k^j = 0$.

Il suffit de choisir les b_j^j , non nuls, tels que les inégalités soient vérifiées, ce qui est évidemment possible d'une infinité de façons.

La matrice B répond bien aux conditions voulues.

b) Autre remarque : considérons un changement de variables réversible :

$$X^i = f^i(x^1,\ldots,x^n) \quad \text{et réciproquement} \quad x^i = \varphi^i(X^1,\ldots,X^n)$$

$(i = 1,\ldots,n)$

Posons : $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j} = f_j^i$, $\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial X^j} = \varphi_j^i$, et soient F et Φ les matrices d'éléments généraux f_j^i et φ_j^i.

On a : $\Phi = F^{-1}$.

c) Soient $u^1,\ldots,u^{n+1}$, n+1 intégrales premières distinctes du système caractéristiques d'une équation de Monge-Ampère.

Soient pour fixer les idées:

---

(1) sauf indication contraire, l'indice inférieur se rapporte à la ligne .

$$z = \psi^1(x^{h+1}, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^{n+1})$$

$$x^\alpha = \psi^{\alpha+1}(x^{h+1}, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^{n+1}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

$$p^\beta = \psi^{\beta+1}(x^{h+1}, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^{n+1}, p^1, \ldots, p^h) \qquad (\beta = h+1, \ldots, n)$$

les formules résolvant le système :

$$u^1 = a^1, \ldots \qquad u^{n+1} = a^{n+1}.$$

Nous allons voir que l'on peut substituer au système $u^1, \ldots, u^{n+1}$ un autre système de n+1 intégrales premières distinctes, qui sera dit "normal", tel que les dérivées partielles

$$\frac{\partial \psi^1}{\partial a^i} \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

soient toutes différentes de zéro.

Remplaçons pour un moment, afin d'unifier les notations, $z, x^1, \ldots, x^h, p^{h+1}, \ldots, p^n$ par $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{h+1}, \xi^{h+2}, \ldots, \xi^{n+1}$;

et posons :

$$\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = u^i_j \qquad \frac{\partial \psi^i}{\partial a^j} = \psi^i_j .$$

Soient U et Ψ les matrices d'éléments généraux u^i_j et ψ^i_j. On a : $\Psi = U^{-1}$.

D'après le lemme, on peut trouver une matrice régulière $B\,(b^j_i)$ telle que, dans la matrice $B\,\Psi$, tous les éléments de la première colonne soient différents de zéro.

Cette matrice B peut être constante, localement. Si, par exemple ψ^1_1 n'est pas nul, on prendra $b^1_k = 1$, $b^j_k = 0$ pour $j > 1$, $k \neq j$, et les b^j_j seront des constantes convenablement choisies.

Soit (c^j_i) l'élément d général de B^{-1}.

Posons : $v^i = c^i_j\, u^j \qquad (i, j = 1, \ldots, n+1)$.

On vérifie sans peine que le système des intégrales premières v^i est normal, au sens indiqué plus haut.

112 - RESOLUTION PAR LA METHODE DE MONGE-JACOBI

Soit $(u^1,\ldots,u^{n+1})$ un système normal d'intégrales premières du système caractéristique , et

$$(1)\qquad \begin{aligned} z &= \psi(x^{h+1},\ldots,x^n, a^1,\ldots,a^{n+1}) \\ x^\alpha &= \psi^\alpha(x^{h+1},\ldots,x^n, a^1,\ldots,a^{n+1}) \qquad (\alpha = 1,\ldots,h) \end{aligned}$$

les équations résultant de l'élimination de $p^1,\ldots,p^n$ entre les relations: $u^1 = a^1, \ldots , u^{n+1} = a^{n+1}$.

Notons que ψ dépend effectivement de $a^1,\ldots,a^{n+1}$. Si, dans ces équations, on remplace a^n et a^{n+1} (par exemple) respectivement par :

$$\varphi(a^1,\ldots,a^{n-1}) \quad \text{et} \quad \psi(a^1,\ldots,a^{n-1}),$$

fonctions arbitraires de $n-1$ arguments , le système (1) représente alors le support ponctuel d'une famille d'intégrales de Lie à $n-1$ paramètres de l' équation intermédiaire :

$$u^{n+1} = \psi(a^1,\ldots,a^{n-1}) .$$

D'où, par la méthode du n° 102 on déduit la solution générale de cette équation, et, par conséquent, celle de l'équation de Monge-Ampère.

Les calculs pourront s'achever, ou non, suivant que le support ponctuel précédent est de dimension égale ou supérieure à 1. Or, on peut connaître à l'avance cette dimension, comme nous allons le voir.

113 - DIMENSION DU SUPPORT PONCTUEL DES INTEGRALES DE LIE

M. Goursat fait remarquer, à la page 16 de son mémoire (1899) , que si l'élimination de $p^1,\ldots,p^n$ entre les relations :

$$u^1 = a^1,\ldots, u^{n+1} = a^{n+1}$$

conduit à r relations distinctes entre $x^1,\ldots,x^n$, z, $a^1,\ldots,a^{n+1}$, c'est-à-dire si le support ponctuel des intégrales de Lie est de dimension $h = n - r + 1$, l'équation de Monge-Ampère est alors de degré h, par rapport aux dérivées du second ordre.

Inversement, démontrons que, si l'équation de M.A. est de degré h par rapport aux dérivées du second ordre , le support ponctuel des intégrales de Lie est de dimension h.

Il faut prouver que le rang de la matrice formée par les coefficients de dz , $dp^1,\ldots,dp^n$ dans le système caractéristique (algébrique-

ment équivalent à $du^1 = 0, \ldots, du^{n+1} = 0$) est égal à $h + 1$. Or ceci résulte immédiatement du théorème du n° 82 ter.

La proposition en vue est donc démontrée .

114 - REMARQUE SUR LES EQUATIONS INTERMEDIAIRES

Une équation du 1er ordre

$$F(x^1,\ldots,x^n, z, p^1,\ldots,p^n) = 0$$

est dite semi-linéaire (au sens de S. Lie) si elle admet une intégrale complète ayant pour support ponctuel une multiplicité ayant plus d'une dimension et moins de n.[1]

Cela étant, il est clair que, si le support ponctuel des intégrales de Lie d'une équation de Monge-Ampère à systèmes caractéristiques confondus, complètement intégrable par la méthode de Monge, est de dimension supérieure à 1, et inférieure à n, toute équation intermédiaire, considérée comme une équation aux dérivées partielles du 1er ordre, est semi-linéaire.

Si la dimension des supports ponctuels est égale à 1, il existe une équation intermédiaire linéaire, ou équivalente à une équation linéaire. Par cette dernière expression, nous entendons une équation

$$\omega(x^1,\ldots,x^n, p^1,\ldots,p^n, z) = \omega_0$$

possédant la propriété suivante :

Il existe des fonctions $a_i(x^1,\ldots,x^n, z, \alpha)$ $(i = 1,\ldots,n+1)$ telles que l'équation en α :

$$a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n + a_{n+1} = 0$$

admette la solution

$$\alpha = \omega \quad .$$

115 - COURBES CARACTERISTIQUES

Dans l'hypothèse où nous sommes placés, l'équation ne possède qu'un seul système caractéristique, dont on connaît $n + 1$ intégrales premières distinctes : $u^1,\ldots,u^{n+1}$.

Il est clair que, sur une variété intégrale V_n, les lignes caractéristiques sont définies par :

---

(1) E. Goursat, Equations aux d.p. du 1er ordre , p. 327.

$$u^i = a^i \qquad (i = 1,\ldots,n+1),$$

les a^i étant des constantes quelconques.

Cherchons à voir de quels arbitraires dépend l'ensemble de toutes les courbes caractéristiques.

Distinguons deux cas, suivant la dimension du support ponctuel des intégrales de Lie.

a) support ponctuel de dimension 1.

Dans ce cas, les caractéristiques de V_n coïncident visiblement avec les supports ponctuels des intégrales de Lie.

D'où l'on déduit que l'ensemble des courbes caractéristiques correspondant à toutes les solutions V_n forme une famille à $n + 1$ paramètres.

b) support ponctuel de dimension supérieure à 1.

Dans ce cas, chaque courbe caractéristique d'une V_n solution donnée est tracée sur un support ponctuel d'une intégrale de Lie. Mais chaque support ponctuel contient une infinité de courbes caractéristiques.

Prenons , pour fixer les idées , le cas $n = 3$, et supposons les supports ponctuels de dimension 2 , définis par :

$$\begin{cases} z = \psi^o(x^2, x^3, a^1,\ldots,a^4) \\ x^1 = \psi^1(x^2, x^3, a^1,\ldots,a^4) \end{cases}$$

Une V_3 intégrale est définie par un système de la forme :

$$\begin{cases} z = \psi^o[x^2, x^3, a^1, a^2, \theta(a^1, a^2), \varphi(a^1, a^2)] \\ x^1 = \psi^1[x^2, x^3, a^1, a^2, \theta(a^1, a^2), \varphi(a^1, a^2)] \\ \dfrac{D(\psi^o, \psi^1)}{D(a^1, a^2)} = 0, \end{cases}$$

où θ et φ sont des fonctions déterminées de a^1 et a^2. Sur une telle variété les caractéristiques sont les courbes : $a^1 = c^{te}$, $a^2 = c^{te}$. Ces courbes appartiennent à la famille à 8 paramètres suivante :

$$z = \psi^o(x^2, x^3, a^1, a^2, a^3, a^4)$$

$$x^1 = \psi^1(x^2, x^3, a^1, a^2, a^3, a^4)$$

$$\left\| \frac{\partial\psi^k}{\partial a^1} + a^5 \frac{\partial\psi^k}{\partial a^3} + a^6 \frac{\partial\psi^k}{\partial a^4}, \quad \frac{\partial\psi^k}{\partial a^1} + a^7 \frac{\partial\psi^k}{\partial a^3} + a^8 \frac{\partial\psi^k}{\partial a^4} \right\| = 0$$

$(k = 0,1)$.

On voit de même dans le cas général (n quelconque) que les courbes caractéristiques , si le support ponctuel des intégrales de Lie est de dimension supérieure à 1, forment une famille dépendant au plus de

$$n + 1 + 2\,(n-1) = 3n - 1 \text{ paramètres .}$$

Cependant, il peut y avoir des réductions . Par exemple, pour l'équation à 3 variables $p^{1,2,3}_{1,2,3} = 0$, qui est celle des "développables" dans l'espace à 4 dimensions, les caractéristiques sont toutes les droites de cet espace, qui dépendent de 6, et non pas de 8, paramètres.

116 - EXEMPLE

Considérons l'équation aux dérivées partielles à 3 variables indépendantes(1) :

$$p^{1\,2\,3}_{1\,2\,3} + \lambda\, p_1\, p^{2\,3}_{2\,3} + \mu\, p_2\, p^{3\,1}_{3\,1} + \nu\, p_3\, p^{1\,2}_{1\,2} + \mu\nu\, p_2\, p_3\, p_{11}$$

$$+ \nu\lambda\, p_3\, p_1\, p_{22} + \lambda\mu\, p_1\, p_2\, p_{33} + \lambda\mu\nu\, p_1\, p_2\, p_3 = 0$$

où λ , μ , ν sont des fonctions d'une seule variable, ne dépendant respectivement que de x_1, x_2, x_3, mais à part cela, quelconques.

On vérifie qu'elle est du type de Monge-Ampère , et possède un seul système caractéristique :

$$dz - \sum_{i=1}^{3} p_i\, dx_i = 0$$

$$dp_1 + p_1\, \lambda\, dx_1 = 0$$

$$dp_2 + p_2\, \mu\, dx_2 = 0$$

$$dp_3 + p_3\, \nu\, dx_3 = 0 ,$$

qui est complètement intégrable.

On trouve aisément un système normal d'intégra les premières :

---

(1) exemple inspiré par l'exemple V de M. Goursat : equations aux d.p. du second ordre , p. 145.

$$u_1 \equiv p_1 \ \varphi(x_1)$$

$$u_2 \equiv p_2 \ \psi(x_2)$$

$$u_3 \equiv p_3 \ \theta(x_3)$$

$$u_4 \equiv z - p_1 \ \varphi(x_1)\, u(x_1) - p_2 \ \psi(x_2) \,.\, v(x_2) - p_3\, \theta(x_3) \,.\, w(x_3)$$

où l'on pose :

$$\varphi(x_1) \equiv e^{\int \lambda . dx_1} \qquad u(x_1) \equiv \int \frac{dx_1}{\varphi(x_1)}$$

$$\psi(x_2) \equiv e^{\int \mu dx_2} \qquad v(x_2) \equiv \int \frac{dx_2}{\psi(x_2)}$$

$$\theta(x_3) \equiv e^{\int \nu dx_3} \qquad w(x_3) \equiv \int \frac{dx_3}{\theta(x_3)}$$

L'élimination des a_i entre les relations $u_i = a_i$ est immédiate :

$$z = a_1\, u(x_1) + a_2\, v(x_2) + a_3\, w(x_3) + a_4$$

Il suffit de poser : $a_3 = \rho(a_1, a_2)$, $a_4 = \chi(a_1, a_2)$, où ρ et χ sont des fonctions arbitraires, la solution générale est donnée par le système d'équations :

$$\begin{cases} z = a_1\, u(x_1) + a_2\, v(x_2) + w(x_3)\, \rho(a_1\, a_2) + \chi(a_1\, ,\, a_2) \\ u(x_1) + w(x_3) \,.\, \dfrac{\partial \rho}{\partial a_1} + \dfrac{\partial \chi}{\partial a_1} = 0 \\ v(x_2) + w(x_3) \,.\, \dfrac{\partial \rho}{\partial a_2} + \dfrac{\partial \chi}{\partial a_2} = 0 \,. \end{cases}$$

PARAGRAPHE TROIS : SYSTEMES CARACTERISTIQUES DISTINCTS

(Cas général).

Nous allons considérer des équations de Monge-Ampère, à systèmes caractéristiques distincts , complètement intégrables par la méthode de Monge. Cette hypothèse suppose, nous l'avons vu, que l'un des systèmes caractéristiques au moins admet n intégrales premières distinctes. Cette condition, nécessaire, n'est pas suffisante.

117 - CONDITION SUFFISANTE DE COMPLETE INTEGRABILITE PAR LA METHODE DE MONGE

Théorème :[1] Pour qu'une équation de Monge-Ampère à systèmes caractéristiques distincts soit complètement intégrable par la méthode de Monge il suffit que ces systèmes caractéristiques admettent n+1 intégrales premières distinctes, dont n-2 soient communes aux deux.

Remarquons d'abord que l'un des systèmes au moins admet n intégrales premières distinctes, sans quoi, n-2 étant communes aux deux , il ne pourrait y avoir au maximum que n intégrales premières distinctes.

Soient, alors :

$u_1, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}$, n intégrales premières distinctes du premier système,

$u_2, u_3, \ldots, u_n$ n-1 intégrales premières distinctes du second.

Quelleque soit φ , fonction arbitraire de n-1 arguments, les n fonctions des x^i, z, p^i :

$$u_{n+1} - \varphi(u_1, u_3, \ldots, u_n) \quad , \quad u_2, \quad u_3, \ldots, u_n$$

sont en involution deux à deux .

Donc on peut trouver une fonction v, distinctes des précédentes, et en involution avec toutes.

(Remarquons que v ne sera pas une intégrale première du second système Dans ce cas, en effet, celui-ci admettrait n intégrales premières distinctes, deux à deux en involution, donc il serait complètement intégrable, ce qui est impossible, puisque les systèmes caractéristiques sont distincts.)

---

(1) communiqué par Monsieur Janet.

Par conséquent, les équations :

$$u_{n+1} - \varphi(u_1, u_3, \ldots, u_n) = 0, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \quad v = b,$$

où les a_i et b sont des constantes arbitraires, définissent une intégrale complète de Lie de l'équation intermédiaire :

$$u_{n+1} - \varphi(u_1, u_3, \ldots, u_n) = 0$$

C.Q.F.D.

118 - EXEMPLE

Considérons , par exemple, l'équation :

$$\begin{vmatrix} p_{11} + a_{11}, \ldots\ldots\ldots, p_{1,n-1} + a_{1,n-1}, & p_{1,n} + a_{1,n} \\ \vdots & \\ p_{n-1,1} + a_{n-1,1}, \ldots, p_{n-1,n-1} + a_{n-1,n-1}, & p_{n-1,n} + a_{n-1,n} + a \\ p_{n,1} + a_{n,1}, \ldots\ldots, p_{n,n-1} + a_{n,n-1} + b, & p_{n,n} + a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

où le tableau des a_{ik} est symétrique, les a_{ik} étant des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, dx_k = du_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et a et b deux constantes : $a \neq b$.

En modifiant un peu les notations du numéro précédent, nous désignerons les intégrales premières des systèmes caractéristiques par :

$v_1, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n$ pour le 1er système

$v_1, \ldots, v_{n-2}, v_{n+1}, v_{n+2}$ pour le second système.

avec : $v_j = p_j + u_j \qquad (j = 1, \ldots, n-2)$

$v_{n-1} = p_{n-1} + u_{n-1} + ax_n, \qquad v_n = p_n + u_n + bx_{n-1}$

$v_{n+1} = p_{n-1} + u_{n-1} + bx_n, \qquad v_{n+2} = p_n + u_n + ax_{n-1}$

Les fonctions : $v_n - \varphi(v_1, \ldots, v_{n-1})$, $v_1, \ldots, v_{n-2}, v_{n+1}$ sont deux à deux en involution.

Cherchons une fonction V en involution avec toutes. V doit vérifier le système suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial V}{\partial p_1}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_1} - \dots - \dfrac{\partial V}{\partial p_n}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_n} = 1 \quad (i=1,\dots,n-2) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x_{n-1}} + p_{n-1}\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial V}{\partial p_1}\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} - \dots - \dfrac{\partial V}{\partial p_{n-1}}\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\partial V}{\partial p_n}\left(\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} + b\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial V}{\partial p_1}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} - \dots - \dfrac{\partial V}{\partial p_{n-1}}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_{n-1}} + b\right) \\ \qquad\qquad - \dfrac{\partial V}{\partial p_n}\left[\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + (b-a)\dfrac{\partial \varphi}{\partial v_{n-1}}\right] = 0 \end{cases}$$

auquel est associé le système aux différentielles totales complètement intégrable :

$$(2)\quad \begin{cases} dz = p_1\, dx_1 + \dots + p_n dx_n \\ dp_1 = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 - \dots - \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} dx_{n-1} - \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} dx_n \\ \vdots \\ dp_{n-2} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n-2}} dx_1 - \dots - \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-2}} dx_{n-1} - \dfrac{\partial u_n}{\partial x_{n-2}} dx_n \\ dp_{n-1} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} dx_1 - \dots - \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} - \left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_{n-1}} + b\right) dx_n \\ dp_n = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} dx_1 - \dots - \dfrac{\partial u_{n-2}}{\partial x_n} dx_{n-2} - \left(\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} + b\right) dx_{n-1} \\ \qquad\qquad - \left[\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + (b-a)\dfrac{\partial \varphi}{\partial v_{n-1}}\right] dx_n \end{cases}$$

Comme $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$, le système (2) admet les intégrales premières évidentes :

$$p_1 + u_1 = c_1, \dots, p_{n-2} + u_{n-2} = c_{n-2}, \quad p_{n-1} + u_{n-1} + bx_n = c_{n-1}.$$

En portant ces valeurs dans la dernière équation, il vient, après intégration :

$$p_n + u_n + bx_{n-1} - \varphi\left[c_1, \dots, c_{n-2}, \; c_{n-1} + (a-b)x_n\right] = k$$

k désignant une nouvelle constante.

Remplaçons $p_1,\dots,p_n$ par leurs valeurs dans la première équation de (2)
On obtient l'équation de Pfaff complètement intégrable :

$$dz = (c_1 - u_1)\,dx_1 + \dots + (c_{n-2} - u_{n-2})\,dx_{n-2} + (c_{n-1} - u_{n-1} - bx_n)\,dx_{n-1}$$

$$+[k - u_n - bx_{n-1} + \varphi(c_1,\dots,c_{n-2}\,;\,c_{n-1} + (a-b)x_n)]\,dx_n$$

Posons :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i dx_i = du,$$

$$\varphi(v_1,\dots,v_{n-1}) \equiv (a-b)\,\frac{\partial\,\psi(v_1,\dots,v_{n-1})}{\partial\,v_{n-1}}$$

On trouve, en intégrant :

$$z = c_1\,x_1 + \dots + c_{n-1}\,x_{n-1} + k\,x_n - bx_{n-1}\,x_n - u$$

$$+ \quad \psi[c_1\,,\dots,\,c_{n-2}\,,\,c_{n-1} + (a-b)x_n] + c_n$$

D'où, en résolvant par rapport à c_n, et en remplaçant les autres constantes par leurs valeurs , la fonction V cherchée :

$$V = z - (p_1 + u_1)x_1 - \dots - (p_n + u_n)x_n - bx_{n-1}\,x_n + u$$

$$+ x_n \quad \varphi(p_1 + u_1\,,\dots,p_{n-2} + u_{n-2}\,,p_{n-1} + u_{n-1} + ax_n)$$

$$- \quad \psi(p_1 + u_1\,,\dots,\,p_{n-2} + u_{n-2}\,,\,p_{n-1} + u_{n-1} + a\,x_n)$$

L'élimination de $p_1,\dots,p_n$ entre

$$p_n + u_n + bx_{n-1} = \quad \varphi(p_1 + u_1\,,\dots,p_{n-2} + u_{n-2}\,,\,p_{n-1} + u_{n-1} + ax_n)$$

$$p_1 + u_1 = c_1,\dots,\,p_{n-2} + u_{n-2} = c_{n-2}\,,\,p_{n-1} + u_{n-1} + bx_n = c_{n-1},$$

$$V = C_n$$

donne :

$$z = c_1x_1 + \dots + c_{n-1}x_{n-1} - bx_{n-1}x_n - u + c_n + \quad \dots,$$

$$+ \quad \psi(c_1\,,\dots,c_{n-2}\,,\,c_{n-1} + (a-b)x_n)$$

intégrale complète de l'équation intermédiaire

$$p_n + u_n + bx_{n-1} = \quad \varphi(p_1 + u_1\,,\dots,p_{n-2} + u_{n-2}\,,\,p_{n-1} + u_{n-1} + ax_n)\,.$$

PARAGRAPHE QUATRE : SUR UNE CLASSE PARTICULIERE D'EQUATIONS DE MONGE-AMPERE

On peut souhaiter d'avoir la solution générale explicite d'une équation de Monge-Ampère , à systèmes caractéristiques distincts, résultat qui n'est pas atteint aux numéros précédents, bien que l'on connaisse une intégrale complète d'une équation intermédiaire possédant le degré de généralité voulu .

Nous nous bornerons à l'hypothèse la plus favorable : c'est-à-dire que chaque système admet n intégrales premières distinctes et qu'il y a n-2 intégrales communes aux deux systèmes. En d'autres termes, on connaît, pour l'ensemble des systèmes caractéristiques n+2 intégrales premières, dont n-2 sont communes aux deux systèmes. Dans le cas où n est égal à 2, il est bien connu qu'on peut, par un changement de variables, trouver la solution générale, explicite d'une équation dont on connaît 4 intégrales premières distinctes des systèmes caractéristiques. Avant d'énoncer le théorème général, rappelons cette méthode classique(1).

119 - CAS PARTICULIER : n=2 . QUATRE INTEGRALES PREMIERES DISTINCTES

Supposons donc que l'on connaisse 4 intégrales premières distinctes :

u, v pour le premier système caractéristique

u_1, v_1 pour le second.

Les deux systèmes caractéristiques n'ont aucune intégrale commune.

On résoud par rapport à x,y,p,q (supposons que ce soit possible) le système :

$$(1) \qquad u = \alpha , \qquad u_1 = \alpha_1 \qquad v = \varphi(\alpha) , \qquad v_1 = \psi(\alpha_1)$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires, et on porte les valeurs trouvées dans l'équation :

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

On obtient alors une équation complètement intégrable, soit :

$$z = \zeta(\alpha, \alpha_1) .$$

une de ses solutions .

En joignant cette valeur de z à celles de x et y en fonction de α et α_1 , obtenues dans la résolution du système (1), on obtient une représentation paramétrique d'une surface intégrale de l'équation de Monge-Ampère. Les formules obtenues contenant deux fonctions arbitraires d'un argument donnent bien , en fait, la solution générale de cette équation ;

On voit que la recherche de cette solution est ramenée à la

(1) cf. E. Goursat, Leçons .... dérivées partielles du 2nd ordre, tome I, page 81.

résolution d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable [1].

Nous nous sommes proposé d'étendre cette méthode au cas de n variables indépendantes. Mais il a fallu introduire une restriction, que nous indiquerons au numéro suivant.

120 - n+2 INTEGRALES PREMIERES DONT n-2 COMMUNES AUX DEUX SYSTEMES

Théorème : supposons que l'on connaisse n+2 intégrales premières distinctes des systèmes caractéristiques, dont n-2 communes aux deux systèmes, soient :

$u_1, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}$ pour le premier système
$u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+2}$ pour le second.

Si l'élimination de $p_1, \ldots, p_n$ entre les relations : $u_k = \alpha_k$ ($(k = 1, \ldots, n+2)$ donne n relations distinctes entre les seules quantités x_i, z, α_k $(i = 1, \ldots, n)$, la solution générale explicite de l'équation de Monge-Ampère s'obtient en résolvant une équation aux différentielles totales complètement intégrable.

Soit φ une fonction arbitraire de $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$,et ψ une fonction arbitraire de $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Supposons que le système :

$$u_i = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$
$$u_{n+1} = \varphi(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$
$$u_{n+2} = \psi(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$

se résolve en :

$$x_i = \theta_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, z)$$
$$(1) \qquad p_1 = \mu_1(\alpha_1, \ldots \alpha_n, z, p_3, \ldots, p_n)$$
$$p_2 = \mu_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, z, p_3, \ldots, p_n).$$

Les n fonctions suivantes des x_i, z, p_i:

$$u_{n+1} - \varphi(u_1, u_3, \ldots, u_n), \qquad u_{n+2} - \psi(u_2, u_3, \ldots, u_n)$$
$$u_3, \ldots, u_n$$

---

(1) M. Goursat énonce (cf. Leçons sur les équations... 2nd ordre, p. 81) d'une manière plus précise, que le problème est ramené à des quadratures. On voit bien, en effet que l'équation obtenue après la transformation de contact indiquée par l'auteur peut être intégrée par des quadratures. Mais il semble qu'il soit nécessaire, pour obtenir cette transformation elle-même, de résoudre une équation aux différentielles totales complètement intégrable.

sont deux à deux en involution . (n° 85)

Donc (n° 65) le système de Pfaff :

$$d[u_{n+1} - \varphi(u_1, u_3, \ldots, u_n)] = 0$$

$$du_3 = 0 \ , \ldots, \ du_n = 0$$

$$d[u_{n+2} - \psi(u_2, \ldots, u_n)] = 0$$

$$dz - \sum p_i \, dx_i = 0$$

est complètement intégrable.

Posons : $u_i = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ et prenons comme nouvelles variables : $\alpha_1 \ , \ldots, \alpha_n \ , z, p_1, \ldots, p_n$,

Le système de Pfaff transformé, encore complètement intégrable, est le suivant :

$$d[u_{n+1} - \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)] = 0$$

$$(2) \qquad d\alpha_3 = 0 \ , \ldots, \quad d\alpha_n = 0$$

$$d[u_{n+2} - \psi(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)] = 0$$

$$\omega_1 = 0$$

En vertu des relations (1), ω_1 ne contient que les différentielles de $\alpha_1 \ , \ldots, \alpha_n \ , z$, soit :

$$\omega_1 \equiv A \, dz + \sum_{i=1}^{n} B_i \, d\alpha_i \quad .$$

On peut , provisoirement, prendre, dans (2) :

$\alpha_1 \ , \alpha_2 \ , p_3, \ldots, p_n$ comme variables indépendantes

$z, p_1, p_2, \alpha_3 \ , \ldots, \alpha_n$ comme variables dépendantes.

Du système (2) on connaît n intégrales premières en évidence dans les n premiers membres.

Egalons les intégrales premières $u_{n+1} - \varphi(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ et $u_{n+2} - \psi(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ à zéro, et laissons telles quelles les intégrales premières $\alpha_3 \ , \ldots, \alpha_n$, en les traitant seulement comme des constantes.

Ce calcul ne laisse plus subsister comme variables, dans l'équation $\omega_1 = 0$, que $\alpha_1, \alpha_2, z, p_3, \ldots, p_n$, car, d'après (1), p_1 et p_2 doivent maintenant être remplacés par μ_1 et μ_2 .

On sait que la nouvelle équation aux différentielles totales ainsi obtenue : $\omega_2 = 0$, est complètement intégrable (cf. n° 61).

On a : $\omega_2 \equiv A \, dz + B_1 \, d\alpha_1 + B_2 d\alpha_2$, avec :

$$A = 1 - \mu_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - p_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} - \dots - p_n \frac{\partial \theta_n}{\partial z}$$

$$B_1 = - \mu_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} - \mu_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} - p_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha_1} - \dots - p_n \frac{\partial \theta_n}{\partial \alpha_1}$$

et une formule analogue pour B_2.

Démontrons que les rapports $\frac{B_1}{A}$ et $\frac{B_2}{A}$ ne dépendent pas des variables $p_3, \dots, p_n$.

On a en effet : $d\,\omega_2 = dA \wedge dz + dB_1 \wedge d\,\alpha_1 + dB_2 \wedge d\alpha_2$

Le coefficient de $dz \wedge d\alpha_1 \wedge dp_k$ $(k = 3, \dots, n)$ dans $\omega_2 \wedge d\omega_2$ est :

$$- A \frac{\partial B_1}{\partial p_k} + B_1 \frac{\partial A}{\partial p_k} .$$

Ce coefficient étant nul identiquement, on a bien $\frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{B_1}{A} \right) = 0$

On a de même, évidemment : $\frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{B_2}{A} \right) = 0$

Soit : $z = \zeta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

une solution de $\omega_2 = 0$. (les variables p_k, nous venons de le démontrer, ne figurent pas dans ζ).

Posons : $\theta_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \zeta) = \xi^i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Jusqu'à présent, nous avons considéré $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ comme des variables dépendantes, donc comme des constantes, dans le système (2). Mais, si nous voulons la solution générale de l'équation de Monge-Ampère, il faut changer de point de vue. Car les fonctions arbitraires φ et ψ doivent dépendre non pas d'une seule variable (comme ce serait le cas si $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ étaient des constantes), mais, chacune , de n-1 variables indépendantes.

Or il se trouve que les formules :

$$(3) \qquad z = \zeta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
$$x_i = \xi^i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

définissent, en représentation paramétrique, une variété à n dimensions, qui est solution de l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre:

$$u_{n+1}[x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n] = \varphi(u_1, u_3, \dots, u_n) ,$$

donc solution générale[1] de l'équation de M.A. considérée. Démontrons-le.

Sur la variété (3) , les dérivées partielles de z sont données par les formules suivantes :

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{1}{\delta} \frac{D(\zeta, \xi^i{}_1, \dots, \xi^i{}_{n-1})}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$$

---

(1) grâce à la présence des fonctions arbitraires φ et ψ .

δ étant le jacobien : $\dfrac{D(\xi^1,\ldots,\xi^n)}{D(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$,

et i, i_1, i_{n-1} une permutation paire des n premiers entiers.

Posons : $\dfrac{D(\zeta,\xi^{i_1},\ldots,\xi^{i_{n-1}})}{D(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \delta^{i_1\ldots i_{n-1}}$.

On a :

$$u_{n+1}(\theta_1,\ldots,\theta_n, z, \mu_1, \mu_2, p_3,\ldots,p_n) = \varphi(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$

$$u_i(\theta_1,\ldots,\theta_n, z, \mu_1, \mu_2, p_3,\ldots,p_n) = \alpha_i \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

Il suffit donc de démontrer les relations :

$$(4)\quad \mu_1\left[\alpha_1,\ldots,\alpha_n, \zeta, \frac{\delta^{1..\hat{3}..n}}{\delta}, -\frac{\delta^{1..\hat{4}..n}}{\delta},\ldots,(-1)^{n-1}\frac{\delta^{1..\hat{n}}}{\delta}\right] = \frac{\delta^{2..n}}{\delta}$$

$$(5)\quad \mu_2\left[\alpha_1,\ldots,\alpha_n, \zeta, \frac{\delta^{1..\hat{3}..n}}{\delta}, -\frac{\delta^{1..\hat{4}..n}}{\delta},\ldots,(-1)^{n-1}\frac{\delta^{1..\hat{n}}}{\delta}\right] = \frac{\delta^{13..n}}{\delta}$$

la notation $1..\hat{i}..n$ désignant la suite $1\ldots n$ privée de i.
Désignons par μ_1^* et μ_2^* les premiers membres de (4) et (5).
On a , d'après l'équation $\omega_2 = 0$, dont ζ est solution :

$$(6)\quad \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha_1}\left(1-\mu_1^*\frac{\partial\theta_1}{\partial z} - \mu_2^*\frac{\partial\theta_2}{\partial z} - \frac{\delta^{1..\hat{3}..n}}{\delta}\frac{\partial\theta_3}{\partial z} + \ldots + (-1)^n\frac{\delta^{1..\hat{n}}}{\delta}\frac{\partial\theta_n}{\partial z}\right) - \mu_1^*\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_1} - \mu_2^*\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha_1} - \frac{\delta^{1..\hat{3}..n}}{\delta}\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha_1} + \ldots + (-1)^n\frac{\delta^{1..\hat{n}}}{\delta}\frac{\partial\theta_n}{\partial\alpha_1} = 0$$

c'est-à-dire :

$$-\mu_1^*\frac{\partial\xi^1}{\partial\alpha_1} - \mu_2^*\frac{\partial\xi^2}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha_1} - \frac{\delta^{1..\hat{3}..n}}{\delta}\frac{\partial\xi^3}{\partial\alpha_1} + \ldots + (-1)^n\frac{\delta^{1..\hat{n}}}{\delta}\frac{\partial\xi^n}{\partial\alpha_1} = 0.$$

On a de même :

$$-\mu_1^*\frac{\partial\xi^1}{\partial\alpha_2} - \mu_2^*\frac{\partial\xi^2}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha_2} - \frac{\delta^{1..\hat{3}..n}}{\delta}\frac{\partial\xi^3}{\partial\alpha_2} + \ldots + \ldots + (-1)^n\frac{\delta^{1..\hat{n}}}{\delta}\frac{\partial\xi^n}{\partial\alpha_2} = 0.$$

Démontrons que ces relations entrainent la suivante , où i est un entier quelconque compris entre 3 et n :

$$-\mu_1^* \frac{\partial \xi^1}{\partial \alpha_i} - \mu_2^* \frac{\partial \xi^2}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_i} - \frac{\delta^{1..\hat{3}..n}}{\delta} \frac{\partial \xi^3}{\partial \alpha_i} + .. + (-1)^n \frac{\delta^{1..\hat{n}}}{\delta} \frac{\partial \xi^n}{\partial \alpha_i}$$

$$= 0$$

Il suffit pour l'établir de vérifier l'identité :

$$\delta \frac{D(\xi^1 \xi^2 \zeta)}{D(\alpha_1, \alpha_2 \alpha_i)} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial \alpha_2} & -\delta^{1..\hat{3}..n} \frac{\partial \xi^3}{\partial \alpha_1} + .. + (-1)^n \delta^{1..\hat{n}} \frac{\partial \xi^n}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \xi^2}{\partial \alpha_2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial \xi^2}{\partial \alpha_i} & -\delta^{1..\hat{3}..n} \frac{\partial \xi^3}{\partial \alpha_i} + .. + (-1)^n - \delta^{1..\hat{n}} \frac{\partial \xi^n}{\partial \alpha_i} \end{vmatrix} = 0$$

ou la suivante, obtenue par addition de la quantité identiquement nulle :

$$-\frac{D(\zeta, \xi^2, \ldots, \xi^n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \frac{D(\xi^1 \xi^2 \xi^1)}{D(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_i)} + \frac{D(\zeta, \xi^1 \xi^3 .. \xi^n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \frac{D(\xi^1 \xi^2 \xi^2)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_i)} :$$

$$\frac{D(\xi^1, \ldots, \xi^n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \frac{D(\xi^1 \xi^2 \zeta)}{D(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_i)} - \frac{D(\zeta \xi^2, \ldots, \xi^n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \frac{D(\xi^1 \xi^2 \xi^1)}{D(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_i)}$$

$$+ \frac{D(\zeta \xi^1 \xi^3 \ldots \xi^n)}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \frac{D(\xi^1 \xi^2 \xi^2)}{D(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_i)}$$

$$+ \ldots + (-1)^h \frac{D(\zeta \xi^1 .. \hat{\xi}^h .. \xi^n)}{D(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)} \frac{D(\xi^1 \xi^2 \xi^h)}{D(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_i)}$$

$$+ \ldots + (-1)^n \frac{D(\zeta \xi^1 .. \xi^{n-1})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \frac{D(\xi^1 \xi^2 \xi^n)}{D(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_i)} = 0$$

Or le premier membre se met sous la forme :

$$(-1)^n \Big[\frac{D(\xi^1 \xi^2)}{D(\alpha_1 \alpha_2)} \frac{D(\zeta \xi^1 .. \xi^n)}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_i)} + \frac{D(\xi^1 \xi^2)}{D(\alpha_2 \alpha_i)} \frac{D(\zeta \xi^1 \ldots \xi^n)}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_1)}$$

$$+ \frac{D(\xi^1 \xi^2)}{D(\alpha_i \alpha_1)} \frac{D(\zeta \xi^1 \ldots \xi^n)}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_2)} \Big]$$

par conséquent il est identiquement nul . C.Q.F.D.

On a donc , sur la variété considérée :

$$d\zeta = \mu_1^* \, d\xi^1 + \mu_2^* \, d\xi^2 + \frac{\delta^{1..\hat{3}..n}}{\delta} \, d\xi^3 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\delta^{1..\hat{n}}}{\delta} \, d\xi^n .$$

Or sur cette variété : $\dfrac{d\zeta}{d\xi^k} = (-1)^{k-1} \dfrac{\delta^{1..\hat{k}..n}}{\delta}$.

Donc on a bien : $\mu_1^* = \dfrac{\delta^{2..n}}{\delta}$, $\mu_2^* = - \dfrac{\delta^{13..n}}{\delta}$

et le théorème est démontré.

121 - EXEMPLE :

Considérons , par exemple, l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ p_{21} - a_{12}p_{11} & p_{22} - a_{12}p_{12} - p_1 \dfrac{a_{12}}{x_2} + b_{22} & p_{23} - a_{12}p_{13} - p_1 \dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_3} + b_{23} \\ p_{31} - a_{13}p_{11} & p_{32} - a_{13}p_{12} - p_1 \dfrac{\partial a_{13}}{\partial x_2} + b_{32} & p_{33} - a_{13}p_{13} - p_1 \dfrac{\partial a_{13}}{\partial x_3} + b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

où les a_{ij} sont des fonctions de x_2, x_3 telles que $a_{12}dx_2 + a_{13}dx_3$ soit une différentielle totale exacte : dA, et les b_{ij} des constantes, avec $b_{32} - b_{23} = B \neq 0$.

L'équation est de la deuxième forme, première espèce, à systèmes caractéristiques distincts (cf. n° 91).

On trouve, pour intégrales premières des systèmes caractéristiques (1)

u_1, u_2, u_3 pour le premier système
u_1, u_4, u_5 pour le second, avec :

$$u_1 \equiv x_1 + A(x_2, x_3)$$

$$u_2 \equiv p_2 - a_{12}p_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \qquad u_4 \equiv u_3 - Bx_2$$

$$u_3 \equiv p_3 - a_{13}p_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \qquad u_5 \equiv u_2 + Bx_3$$

(1) modifiant un peu les notations du numéro précédent, nous désignerons ici par u_1 l'intégrale commune aux deux systèmes .

On est donc ramené à résoudre l'équation du 1er ordre :

$$u_3 = \varphi(u_1, u_2)$$

où φ est une fonction arbitraire de deux arguments.

Posons : $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$, $u_4 = \gamma$, $u_3 = \varphi(\alpha, \beta)$

$$u_5 = \psi(\alpha, \gamma).$$

[où ψ est une nouvelle fonction arbitraire de deux arguments].

On tire de là x_2, x_3, x_1, p_2, p_3 en fonction de α , β , γ , z, p_1 :

$$x_2 = \frac{1}{B}(\varphi - \gamma)$$

$$x_3 = \frac{1}{B}(\psi - \beta)$$

$$x_1 = \alpha - A(x_2, x_3)$$

$$p_2 = a_{12}p_1 + 1/B\,(b_{32}\beta + b_{22}\gamma - b_{22}\varphi - b_{23}\psi)$$

$$p_3 = a_{13}p_1 + 1/B\,(b_{33}\beta + b_{32}\gamma - b_{23}\varphi - b_{33}\psi)$$

Portons ces valeurs dans $dz - \sum_{i=1}^{3} p_i dx_i = 0$. Il vient :

$$dz - \frac{1}{B^2}(b_{32}\beta + b_{22}\gamma - b_{22}\varphi - b_{23}\psi)(d\varphi - d\gamma)$$

$$- \frac{1}{B^2}(b_{33}\beta + b_{32}\gamma - b_{23}\varphi - b_{33}\psi)(d\psi - d\beta)$$

$$- p_1\, d\alpha = 0.$$

Considérons pour le moment α comme une constante, et posons $d\alpha = 0$.

L'équation précédente, aux variables z, β , γ , est alors complètement intégrable.

On trouve aisément la solution suivante , dans laquelle les deux fonctions $f(\alpha, \beta)$ et $g(\alpha, \gamma)$ sont telles que :

$$\varphi(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial \beta}, \quad \psi(\alpha, \gamma) \equiv \frac{\partial g(\alpha, \gamma)}{\partial \gamma} :$$

$$z = \frac{1}{B^2}\Big\{ -b_{32}\Big(\beta - \frac{\partial g}{\partial \gamma}\Big)\Big(\gamma - \frac{\partial f}{\partial \beta}\Big) + B\Big(\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial g}{\partial \gamma} - f - g\Big)$$

$$- b_{22}/2\,\Big(\gamma - \frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)^2 - \frac{b_{33}}{2}\Big(\beta - \frac{\partial g}{\partial \gamma}\Big)^2$$

D'où la solution générale de l'équation de Monge-Ampère, dans laquelle, cette fois, α , β , γ désignent des paramètres indépendants, f une fonction arbitraire de α et β , et g une fonction arbitraire de α et γ .

$$x_1 = \alpha - A(x_2, x_3)$$

$$x_2 = 1/B\left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \gamma \right)$$

$$x_3 = 1/B\left(\frac{\partial g}{\partial \gamma} - \beta \right)$$

$$z = 1/B^2 \left\{ \begin{array}{l} - b_{32} \left(\beta - \frac{\partial g}{\partial \gamma} \right) \left(\gamma - \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + B\left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \gamma} - f - g \right) \\ - b_{22}/2 \left(\gamma - \frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^2 - b_{33}/2 \left(\beta - \frac{\partial g}{\partial \gamma} \right)^2 \end{array} \right.$$

CHAPITRE QUATRE

APPLICATIONS , DANS L'ESPACE A QUATRE DIMENSIONS

Nous nous proposons dans ce chapitre, de donner quelques exemples d'équations de Monge-Ampère à 3 variables indépendantes, dans l'espace à 4 dimensions réelles (x_1, x_2, x_3, z) . Le langage sera celui de la géométrie. Une variété à k dimensions sera notée V_k. (V_3 = cloison ; cas particuliers : hyperplan, hypersphère, V_1 = courbe ; V_1 linéaire = droite). Sur une V_3, les 3 premières coordonnées seront prises comme variables indépendantes (1).

PARAGRAPHE UN : FAMILLES A QUATRE PARAMETRES DE COURBES OU DE CLOISONS

122 - CLOISONS D'UNE FAMILLE DE COURBES A 4 PARAMETRES

Soit F_4 une famille de courbes à 4 paramètres(2)

(1) $$f_k\,(x_i, z, a_l) = 0$$

Chaque famille à 2 paramètres extraite de F_4 engendre une cloison V. Soit Φ l'ensemble des cloisons ainsi engendrées. Nous allons voir que toutes les variétés de Φ vérifient une même équation aux dérivées partielles du second ordre, qui est du type de Monge-Ampère.

Soit une courbe C de la famille F_4, appartenant à une variété V de la famille Φ . Désignons par la notation δ les différentielles calculées le long de C.

On a, les dérivées p_i étant relatives à V :

(2) $$\delta z = \sum_i p_i\,\delta x_i$$

D'autre part :

(3) $$\sum_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial z}\,\delta z = 0$$

(1) Ce chapitre est une généralisation de l'étude faite par M.Goursat dans ses "Leçons sur les équations aux dérivées partielles du 2nd ordre" (pour le cas de deux variables indépendantes) - Pages 2 à 18, et 147 à 157.

(2) Valeurs prises par les indiees dans ce numéro : i,j = 1,2,3, k = 1,2,3 , l = 1,2,3,4.

Du système (3) on tire, les A_i et B désignant des déterminants extraits du tableau :

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \frac{\partial f_k}{\partial x_2}, \frac{\partial f_k}{\partial x_3}, \frac{\partial f_k}{\partial z}\right) :$$

$$(4) \qquad \frac{\delta x_1}{A_1} = \frac{\delta x_2}{A_2} = \frac{\delta x_3}{A_3} = \frac{\delta z}{B} = \delta\theta ,$$

θ désignant une variable auxiliaire.

On a donc, d'après (2) :

$$(5) \qquad B = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 .$$

Différentions l'équation (2) le long de C. On a , les dérivées partielles p_{ij} étant relatives à V :

$$(6) \qquad \delta^2 z = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{ij}\, \delta x_i\, \delta x_j + p_1\, \delta^2 x_1 + p_2\, \delta^2 x_2 + p_3\, \delta^2 x_3$$

Or : $\delta^2 x_1 = \delta A_1\, \delta\theta$, $\delta^2 x_2 = \delta A_2\, \delta\theta$, $\delta^2 x_3 = \delta A_3\, \delta\theta$,

$$\delta^2 z = \delta B\, \delta\theta ,$$

et δA_1 , par exemple, est donné par :

$$\delta A_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}\, \delta x_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\, \delta x_2 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\, \delta x_3 + \frac{\partial A_1}{\partial z}\, \delta z .$$

En portant ces valeurs dans (6) , il vient, compte tenu de (4), et après suppression du facteur $\delta\theta^2$:

$$(7) \qquad \frac{1}{2} \sum_i \sum_j A_i A_j p_{ij} + \sum_i p_i \left(\sum_j A_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + B \frac{\partial A_i}{\partial z} \right)$$

$$- \left(\sum_i A_i \frac{\partial B}{\partial x_i} + B \frac{\partial B}{\partial z} \right) = 0$$

L'équation aux dérivées partielles cherchées résulte de l'élimination des a_l entre les relations (1), (5), (7) .Pour cela, on peut résoudre, par rapport aux a_l le système (1),(5); soit :

$$a_l = \varphi_l(x_i, z, p_i)$$

sa solution ; puis remplacer a_l par φ_l dans les coefficients de (7). Nous indiquerons que cette substitution a eu lieu en affectant d'un astérisque les coefficients de (7) . L'équation cherchée est donc .

$$(8) \qquad \frac{1}{2} \sum_i \sum_j A_i^* A_j^* p_{ij} + \Psi = 0,$$

en posant :

$$\Psi \equiv \sum_i p_i \left[\sum_j A_j^* \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)^* + B^* \left(\frac{\partial A_i}{\partial z}\right)^* \right]$$

$$- \left[\sum_i A_i^* \left(\frac{\partial B}{\partial x_i}\right)^* + B^* \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^* \right]$$

On vérifie que cette équation est du type de Monge-Ampère, et qu'elle possède un seul système caractéristique, le suivant : (écrit en supposant $A_1^* \not\equiv 0$) :

$$\begin{cases} dz - \sum_i p_i dx_i = 0 \\ A_1^* dx_2 - A_2^* dx_1 = 0 \\ A_1^* dx_3 - A_3^* dx_1 = 0 \\ (A_1^*)^2 dp_1 + \Psi dx_1 + A_1^* A_2^* dp_2 + A_1^* A_3^* dp_3 = 0. \end{cases}$$

Cherchons à remplacer la fonction Ψ par une autre, plus simple

Ψ peut se mettre sous la forme :

$$A_1^* \left[-\left(\frac{\partial B}{\partial x_1}\right)^* + \sum_i p_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_1}\right)^*\right] + A_2^* \left[-\left(\frac{\partial B}{\partial x_2}\right)^* + \sum_i p_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_2}\right)^*\right]$$

$$+ A_3^* \left[-\left(\frac{\partial B}{\partial x_3}\right)^* + \sum_i p_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_3}\right)^*\right] + B^* \left[-\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^* + \sum_i p_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial z}\right)^*\right]$$

Comme on a identiquement :

$$B^* = p_1 A_1^* + p_2 A_2^* + p_3 A_3^*$$

$B^* dx_1$ peut être remplacé, compte tenu des 3 premières équations du système, par : $A_1^* dz$.

Donc, compte tenu de ces équations, $(A_1^*)^{-1} \Psi dx_1$ peut être remplacé par :

$$\sum_j \left[-\left(\frac{\partial B}{\partial x_j}\right)^* + \sum_i p_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)^*\right] dx_j + \left[-\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^* + \sum_i p_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial z}\right)^*\right] dz$$

Mais on a :

$$\sum_i \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_i}\right)^* dx_i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)^* dz \equiv d(A_1^*) - \sum_l \left(\frac{\partial A_1}{\partial a_l}\right)^* d\varphi_l ,$$

et des identités analogues pour A_2, A_3, B.

Par conséquent, $(A_1^*)^{-1}\,\psi\,dx_1$ peut être remplacé, dans la dernière équation du système caractéristique, par :

$$\sum_i p_i d(A_i^*) - d(B^*) + \sum_l \left[\left(\frac{\partial B}{\partial a_l}\right)^* - \sum_i p_i\left(\frac{\partial A_i}{\partial a_l}\right)^*\right] d\varphi_l \,.$$

On voit donc, compte tenu de : $d(B^* - \sum_i p_i A_i^*) \equiv 0$,

que cette dernière équation peut être remplacée par :

$$(9) \qquad \sum_l \left[\left(\frac{\partial B}{\partial a_l}\right)^* - \sum_i p_i\left(\frac{\partial A_i}{\partial a_l}\right)^*\right] d\varphi_l = 0 \,.$$

Les trois premières équations, compte tenu de : $B^* - \sum_i p_i A_i^* \equiv 0$, équivalent à :

$$\frac{dx_1}{A_1^*} = \frac{dx_2}{A_2^*} = \frac{dx_3}{A_3^*} = \frac{dz}{B^*} \,.$$

D'où, on déduit, en revenant à la définition de A_1, A_2, A_3, B :

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial z}\right)^* dz + \sum_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)^* dx_i = 0$$

Mais on a identiquement, par définition :

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial z}\right)^* dz + \sum_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)^* dx_i + \sum_l \left(\frac{\partial f_k}{\partial a_l}\right)^* d\varphi_l \equiv 0.$$

Donc les trois premières équations du système entrainent :

$$\sum_l \left(\frac{\partial f_k}{\partial a_l}\right)^* d\varphi_l = 0 \qquad (k = 1,2,3).$$

Les équations, jointes à (9), montrent que le système :

$$d\varphi_l = 0 \qquad (l = 1,\ldots,4)$$

est une conséquence du système caractéristique, et même, comme il est en général de même rang 4, que celui-ci, il lui est algébriquement équivalent.

Donc la solution générale du système caractéristique est donnée par les relations :

$$f_k(x_i, z, a_l) = 0$$

$$B = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 \,,$$

où les a_l désignent des constantes arbitraires.

Les courbes caractéristiques de l'équation de Monge-Ampère ne sont autres que celles formant les supports ponctuels des intégrales de Lie, c'est-à-dire les courbes de la famille F_4 d'où nous sommes partis.

124 - CAS PARTICULIER D'UNE FAMILLE DE DROITES

Supposons que la famille F_4 soit composée de droites. L'équation de M.A. formée au numéro précédent possède alors des propriétés particulières non seulement c'est une équation, linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, dont le système caractéristique, unique, est complètement intégrable, mais encore, comme nous allons le voir, sur toute cloison intégrale les caractéristiques sont des asymptotiques , c'est-à-dire des lignes le long desquelles la relation :

$$\sum_{i=1}^{3} dx_i \, dp_i = 0$$

est vérifiée.

La démonstration est d'ailleurs immédiate : il suffit de remarquer que les caractéristiques sont des droites ; et de vérifier que toute droite d'une cloison est une courbe asymptotique de cette variété. En effet, le long d'une droite dx_i et dz sont de la forme : $dx_i = a\,dt$, $dz = b\,dt$, les a_i et b étant des constantes, et les dérivées partielles p_i relatives à la cloison sur laquelle elle est tracée vérifient :

$\sum_{i=1}^{3} a_i p_i - b = 0$, qui donne en différentiant le long de la droite :

$$\sum_i a_i \, dp_i = 0, \text{ et par conséquent : } \sum_i dx_i \, dp_i = 0.$$

C.Q.F.D.

125 - ENVELOPPES, DANS UNE FAMILLE DE CLOISONS A 4 PARAMETRES.

Soit F_4 une famille de cloisons à 4 paramètres (1) :

$$F(x_i, z, a_l) = 0 \tag{1}$$

Toute famille à 2 paramètres extraite de la précédente , en posant par exemple :

$$a_3 = \varphi(a_1, a_2) \qquad a_4 = \psi(a_1, a_2) ,$$

admet pour enveloppe une cloison Σ (2) , dont on obtient les équations en éliminant a_1 et a_2 entre les relations :

---

(1) valeur des indices dans ce numéro : $i=1,2,3$, $l = 1,\ldots,4$. $j=1,2,3$.

(2) Ce n'est pas la seule manière d'obtenir une enveloppe à partir des variétés de F_4 : on pourrait aussi bien faire de l'un des paramètres une fonction des trois autres . Cette famille à 3 paramètres admettrait aussi comme enveloppe une cloison. Mais celle-ci ne toucherait plus chaque variété de F_4 qu'en un point, tandis que le contact a lieu le long d'une courbe dans l'hypothèse du texte.

$$(2)\qquad \begin{cases} F(x_i, z, a_1, a_2, \varphi, \psi) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1}\dfrac{\partial F}{\partial a_3} + \dfrac{\partial \psi}{\partial a_1}\dfrac{\partial F}{\partial a_4} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2}\dfrac{\partial F}{\partial a_3} + \dfrac{\partial \psi}{\partial a_2}\dfrac{\partial F}{\partial a_4} = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des équations (2), où a_1 et a_2 sont donnés, définit une courbe, C, le long de laquelle Σ est tangente à la variété de F_4 pour laquelle les paramètres a_1, a_2, a_3, a_4 ont même valeur que a_1 a_2 φ ψ sur l'enveloppe. Σ est le lieu de cette courbe C lorsque a_1 et a_2 varient, indépendamment l'un de l'autre.

Nous allons voir que toutes ces enveloppes Σ vérifient une même équation de Monge-Ampère.

Considérons l'une d'elles, soit Σ, et soit C la courbe de contact de cette enveloppe avec l'une des variétés de F_4, que nous désignerons par V.

Désignons par δ les différentielles le long de C, et par p_i, p_{ij} les dérivées partielles de z sur Σ.

On a :(1)

$$(3)\qquad \begin{aligned} & F_{x_i} + p_i F_z = 0 \\ & \delta z = \sum_i p_i \, \delta x_i \end{aligned}$$

D'autre part, en différentiant le long de C, sur V, il vient, puisque p_i est le même sur V et sur Σ :

$$\delta(F_{x_i}) + p_i \, \delta(F_z) + \delta p_i \, F_z = 0$$

Remplaçons δz par $\sum_j p_j \, \delta x_j$ et δp_i par $\sum_j p_{ij} \, \delta x_j$.
On obtient :

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum_j F_{x_i x_j} \, \delta x_j + F_{x_i z} \left(\sum_j p_j \, \delta x_j \right) \\ + p_i \left[\sum_j F_{z x_j} \, \delta x_j + F_{zz} \left(\sum_j p_j \, \delta x_j \right) \right] + F_z \left(\sum_j p_{ij} \, \delta x_j \right) = 0 \end{cases}$$

Des relations (1) et (3) tirons les a_1 en fonction des x_i, z, p_i et portons ces valeurs dans (4). Il suffit d'éliminer ensuite les δx_i entre les 3 équations linéaires et homogènes ainsi obtenues pour avoir l'équation aux dérivées partielles cherchée.

---

(1) pour simplifier nous écrirons F_{x_i}, sans accent, au lieu de F'_{x_i}, et de même qu pour les autres dérivées partielles.

Soient : $$a_1 = \varphi_1(x_i, z, p_i)$$

les formules résolvant le système des équations (1) et (3) . Une astérisque affectant une fonction des x_i, z, a_1 , indiquera qu'on y suppose a_1 remplacé par φ_1. On a identiquement :

$$F^* \equiv 0 \qquad F^*_{x_i} + p_i F^*_z \equiv 0.$$

Cela étant, l'équation aux dérivées partielles trouvée est la suivante :

$$(5) \qquad \left\| F^*_{x_i x_j} + p_i F^*_{x_j z} + p_j F^*_{x_i z} + p_i p_j F^*_{zz} + p_{ij} F^*_z \right\| = 0$$

où le premier membre est un déterminant du 3ème ordre dont on a écrit seulement l'élément général (i,j).

Cette équation est visiblement du type de Monge-Ampère et admet pour l'un de ses systèmes caractéristiques le suivant :

$$\begin{cases} \omega \equiv dz - \sum_i p_i dx_i = 0 \\ F^*_z dp_i + \sum_j [F^*_{x_i x_j} + p_i F^*_{x_j z} + p_j F^*_{x_i z} + p_i p_j F^*_{zz}] dx_j = 0 \end{cases}$$

$$(i = 1,2,3)$$

ou :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \theta_i = 0 \qquad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

en posant :

$$\theta_i \equiv F^*_z dp_i + \sum_j (F^*_{x_i x_j} + p_i F^*_{x_j z}) dx_j + (F^*_{x_i z} + p_i F^*_{zz}) dz$$

Mais :

$$d(F^*_{x_i} + p_i F^*_z) \equiv 0 \equiv \sum_l (F^*_{x_i a_l} + p_i F^*_{z a_l}) d\varphi_l + \theta_i .$$

Donc le système caractéristique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ (F^*_{x_i a_l} + p_i F^*_{z a_l}) d\varphi_l = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Compte tenu de : $F^*_{x_i} + p_i F^*_z \equiv 0$, la première équation, $\omega = 0$, peut s'écrire :

$$\omega_1 \equiv F^*_{x_1} dx_1 + F^*_{x_2} dx_2 + F^*_{x_3} dx_3 + F^*_z dz = 0$$

Mais :

$$d(F^*) \equiv 0 \equiv \omega_1 + \sum_l F^*_{a_l} \, d\varphi_l \quad ;$$

si bien que la première équation peut être remplacée par :

$$\sum_l F^*_{a_l} \, d\varphi_l = 0,$$

et que, finalement, le système caractéristique est algébriquement équivalent au système :

$$d\varphi_l = 0 \qquad (l = 1,2,3,4).$$

Celui-ci étant complètement intégrable, le système caractéristique est nécessairement unique.

Sa solution générale est donnée par les relations :

$$\begin{cases} F = 0 \\ F_{x_i} + p_i F_z = 0 \end{cases}$$

où les a_l sont des constantes arbitraires.

Les supports des intégrales de Lie (1) sont les variétés à 3 dimensions définies par $F = 0$: nous retrouvons la famille F_4 d'où nous sommes partis.

126 - CAS PARTICULIER : FAMILLE D'HYPERSPHERES

Définissons les lignes de courbure d'une cloison comme celles le long desquelles on a :

$$\frac{dx_1 + p_1 \, dz}{dp_1} = \frac{dx_2 + p_2 \, dz}{dp_2} = \frac{dx_3 + p_3 \, dz}{dp_3}$$

On vérifie aisément que toute ligne tracée sur une hypersphère , cloison définie par une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + z^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + 2\, bz + c = 0$$

(où les a_i, b, c, sont des constantes), est une ligne de courbure.

Considérons donc une famille F_4 composée d'hypersphères, et imaginons que l'on ait formé, comme au numéro précédent, l'équation de Monge-Ampère associée. Σ étant l'enveloppe d'une famille doublement infinie d'hypersphères extraite de F_4 , ses caractéristiques (au sens de la théorie des équations de Monge-Ampère) sont ses lignes de contact avec les hypersphères

(1) qui sont d'ailleurs ici des intégrales au sens ordinaire.

qu'elle enveloppe. Ce sont des lignes de courbure pour Σ , comme pour les hypersphères . Donc l'équation de Monge-Ampère ainsi obtenue est d'un type très particulier : son système caractéristique, unique, est complètement intégrable, et , sur toute cloison intégrale, les caractéristiques sont des lignes de courbure.

PARAGRAPHE DEUX - CARACTERISTIQUES, LIGNES ASYMPTOTIQUES

127 - EQUATIONS A CARACTERISTIQUES ASYMPTOTIQUES

Cherchons s'il existe des équations de Monge-Ampère telles que, sur toute cloison intégrale, les lignes caractéristiques de l'un ou l'autre des systèmes soient asymptotiques (1).

Passons en revue les 6 formes possibles d'une telle équation. Nous reprendrons les notations des n° 90 à 95.

Il suffit, dans chaque cas, d'écrire que la relation

$$\sum_{i=1}^{3} dp_i \, dx_i = 0$$

est une conséquence de l'un des systèmes caractéristiques. Voici les résultats obtenus.

a) Première forme :

Il faut et il suffit , pour que l'équation soit du type étudié, que la matrice (a_{ij}) soit antisymétrique.

L'équation de Monge-Ampère correspondante la plus générale est la suivante :

$$p^{123}_{123} + \lambda^2 p_{11} + \mu^2 p_{22} + \nu^2 p_{33} + 2\lambda\mu \, p_{12} + 2\mu\nu \, p_{23} + 2\nu\lambda \, p_{31} = 0,$$

λ , μ , ν étant des fonctions quelconques des (x_i, z, p_i) . Les systèmes caractéristiques sont en général distincts : dans ce cas les deux familles de lignes caractéristiques sont des asymptotiques .

Ils ne sont confondus que si λ , μ , ν , sont tous les trois identiquement nuls. Alors l' équation se réduit à :

$$p^{123}_{123} = 0.$$

(1) Il s'agit des asymptotiques au sens classique. Une intéressante généralisation de cette notion est celle introduite par Monsieur Bouligand, dans son étude "Sur la topologie restreinte du second ordre". cf. Revue Scientifique , 85e année,(1947) , fascicule 5, pages 282-285.

Dans ce cas, la solution générale est l'enveloppe d'une famille quelconque à 2 paramètres extraite de la famille à 4 paramètres :

$$z = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d.$$

Les caractéristiques sont évidemment des droites (c'est-à-dire V_1 linéaires).

b) Deuxième forme, première espèce

L'équation de Monge-Ampère la plus générale du type cherché est la suivante :

$$p^{23}_{23} + \lambda^2 \; p^{13}_{13} + \mu^2 \; p^{12}_{12} + 2\lambda \; p^{31}_{23} + 2\mu \; p^{12}_{23} - 2\lambda\mu \; p^{13}_{12} + \nu^2 = 0$$

les λ, μ, ν, étant des fonctions quelconques des (x_i, z, p_i).

Les systèmes caractéristiques :

$$dx_1 + \lambda dx_2 + \mu dx_3 = 0 \qquad\qquad dx_1 + \lambda dx_2 + \mu dx_3 = 0$$

$$dp_2 + \nu dx_3 - \lambda dp_1 = 0 \qquad\qquad dp_2 - \nu dx_3 - \lambda dp_1 = 0$$

$$dp_3 - \nu dx_2 - \mu dp_1 = 0 \qquad\qquad dp_3 + \nu dx_2 - \mu dp_1 = 0$$

sont en général distincts, et l'on voit aisément que les deux familles de lignes caractéristiques sont asymptotiques.

Pour que les systèmes soient confondus, il faut et il suffit que ν soit identiquement nul . (nous reviendrons sur ce cas un peu plus loin).

Remarque : On peut aussi considérer, au lieu de la première, les seconde et troisième espèces d'équations de la deuxième forme, ce qui revient à faire des permutations circulaires sur les indices des x_i et des p_i.

c) Troisième quatrième et sixième formes

Aucune équation de Monge-Ampère de la 3ème, 4ème ou 6ème forme ne peut appartenir au type considéré .

d) Cinquième forme, première espèce .

L'équation de Monge-Ampère la plus générale de la cinquième forme, première espèce, appartenant au type étudié est la suivante :

$$p_{11} + \lambda^2 \; p_{22} + \mu^2 \; p_{33} - 2\lambda \; p_{12} - 2\mu \; p_{13} + 2\lambda\mu \; p_{23} = 0$$

où λ et μ sont des fonctions quelconques des (x_i, z, p_i) .

Il n'y a qu'un seul système caractéristique, le suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} dz - \sum_{i=1}^{3} p_i dx_i = 0 \\ dx_2 + \lambda dx_1 = 0 \\ dx_3 + \mu dx_1 = 0 \\ dp_1 - \lambda dp_2 - \mu dp_3 = 0 \end{cases}$$

On peut toujours, par une transformation de contact, ramener à la cinquième forme une équation de la seconde forme, appartenant au type étudié, lorsque les systèmes caractéristiques sont confondus ($\nu = 0$).

Il suffit d'effectuer la transformation de Legendre :

$$x_i = P_i \; ; \quad p_i = -X_i \; , \; (i = 1,2,3) \; , \quad z = Z - \sum_{i=1}^{3} P_i X_i \; ,$$

transformation qui conserve les asymptotiques, comme on le voit immédiatement

128 - CAS D'INTEGRABILITE COMPLETE PAR LA METHODE DE MONGE

Théorème : Soit une équation de Monge-Ampère , linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, telle que, sur toute cloison intégrale, les caractéristiques soient lignes asymptotiques.

Si cette équation est complètement intégrable par la méthode de Monge, chaque cloison intégrale est engendrée par une famille doublement infinie de droites, extraite d'une famille à 4 paramètres.

D'après le numéro précédent, l'équation considérée ne peut être que de la cinquième forme. Pour fixer les idées supposons-la de la 1ère espèce.

Nous savons déjà que le système caractéristique est nécessairement unique, et de la forme (S) indiquée au numéro précédent. L'équation sera complètement intégrable par la méthode de Monge si le système caractéristique est lui-même complètement intégrable, et seulement dans ce cas.

Conservons les notations du numéro précédent.

Le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les intégrales premières du système (S) est le suivant :

$$\frac{\partial V}{\partial p_2} + \lambda \frac{\partial V}{\partial p_1} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial p_3} + \mu \frac{\partial V}{\partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial V}{\partial z} - \lambda \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \mu \left(\frac{\partial V}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0$$

Les conditions pour que ce système soit complètement intégrable sont les suivantes :

$$(1)\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} = 0 & \lambda \dfrac{\partial \mu}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \mu}{\partial p_2} = 0 \\ \mu \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_3} = 0 & \mu \dfrac{\partial \mu}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \mu}{\partial p_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_2} - \mu \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_3} + (p_1 - \lambda p_2 - \mu p_3) \dfrac{\partial \lambda}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial \mu}{\partial x_2} - \mu \dfrac{\partial \mu}{\partial x_3} + (p_1 - \lambda p_2 - \mu p_3) \dfrac{\partial \mu}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Supposons ces équations(1) vérifiées .

Le système (S) admet alors 4 intégrales premières distinctes u,v,w,s. De plus, comme l'équation de M.A. est du 1er degré par rapport aux p_{ij}, l'élimination de p_1, p_2, p_3 entre les relations $u = a_1$, $v = a_2$, $w = a_3$, $s = a_4$ fournit 3 relations distinctes entre x_1, x_2, x_3, z. Les multiplicités caractéristiques ont donc pour support des variétés à 1 dimension C_1 . Chaque cloison intégrale est engendrée par des courbes C_1.

Comme le système caractéristique est résolu par rapport à dx_2, dx_3, dz, dp_1, il est possible de prendre x_1 comme variable indépendante sur chaque courbe caractéristique.

Il s'agit donc de démontrer que celles-ci sont des droites. Dérivons l'équation $dx_2 + \lambda dx_1 = 0$ le long d'une telle courbe, en prenant x_1 comme variable indépendante . Il vient :

$$d^2x_2 + d\lambda \ . \ dx_1 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$d^2x_2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} dz + \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \lambda}{p_2} dp_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial p_3} dp_3\right) dx_1 = 0$$

Remplaçons dx_2, dx_3, dz,dp_1 par leurs valeurs tirées de (S). La parenthèse devient :

$$- \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} dx_1 - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} (p_1 - \lambda p_2 - \mu p_3) dx_1 + (\lambda dp_2 + \mu dp_3) \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial p_3} dp_3 ,$$

qui est nul identiquement,d'après (1).

Donc, sur C_1, x_2 est fonction linéaire de x_1.

On démontre le même résultat pour x_3.

Différentions enfin : $dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + p_3\, dx_3$ le long de C_1. Il vient, d'après ce qui précède, et compte tenu du fait que C_1 est une asymptotique de toute surface intégrale sur laquelle elle est tracée.

$$d^2 z = 0.$$

Donc z est , sur C_1, fonction linéaire de x_1. Par conséquent les C_1 sont bien des droites. D'après la méthode générale, toute solution de l'équation de M.A. est engendrée par une famille à 2 paramètres extraite de la famille F_4 des droites-supports de la solution générale de (S).

C.Q.F.D.

129 - EXEMPLES

a) Considérons l' équation à coefficients constants :

$$p_{11} + \lambda^2 p_{22} + \mu^2 p_{33} + 2\lambda\, p_{12} + 2\mu\, p_{13} + 2\lambda\mu\, p_{23} = 0$$

Sa solution générale est formée des variétés V_3 engendrées par les droites :

$$x_2 = \lambda x_1 + a$$
$$x_3 = \mu x_1 + b$$
$$z = x_1 \cdot \varphi(a,b) + \psi(a,b)$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires de deux arguments.

b) Autre exemple : Partons cette fois de la famille de droites à 4 paramètres :

$$x_2 = ax_1 + b\,, \qquad x_3 = bx_1 + c\,, \qquad z = cx_1 + d.$$

Un calcul simple montre que, sur toute variété V_3 engendrée par une famille à 2 paramètres extraite de la précédente, les p_i et p_{ij} vérifient :

$$c = p_1 + ap_2 + bp_3$$

$$0 = p_{11} + a^2\, p_{22} + b^2\, p_{33} + 2ap_{12} + 2b\, p_{13} + 2ab\, p_{23}.$$

Si bien que l'équation aux dérivées partielles des variétés V_3 est la suivante :

$$H^2 p_{11} + K^2 p_{22} + L^2 p_{33} + 2KL\, p_{23} + 2LH\, p_{31} + 2HK\, p_{12} = 0$$

avec

$$H \equiv x_1(p_3 + x_1) - p_2$$
$$K \equiv x_2(p_3 + x_1) + p_1 - x_3$$
$$L \equiv x_1(x_3 - p_1) - p_2\, x_2$$

C'est bien une équation de M.A. de la cinquième forme. On vérifie que son système caractéristique

$$\begin{cases} Hdx_2 - Kdx_1 = 0 \\ Hdx_3 - Ldx_1 = 0 \\ Hdp_1 + Kdp_2 + Ldp_3 = 0 \\ dz = \sum_{i=1}^{3} p_i dx_i \end{cases}$$

admet les intégrales premières :

$$\frac{K}{H}, \quad \frac{L}{H}, \quad \frac{x_3 H - x_1 L}{H}, \quad \frac{z H + x_1(x_1 L - x_3 H)}{H}$$

et la solution générale :

$$x_2 = ax_1 + b, \qquad x_3 = bx_1 + c, \qquad z = cx_1 + d$$

$$c = p_1 + ap_2 + bp_3.$$

PARAGRAPHE TROIS - CARACTERISTIQUES , LIGNES DE COURBURE

130 - EQUATIONS A CARACTERISTIQUES LIGNES DE COURBURE

Cherchons s'il existe des équations de Monge-Ampère telles que, sur toute cloison intégrale, les caractéristiques soient lignes de courbure. Il suffit d'écrire que les équations :

$$\frac{dx_1 + p_1 dz}{dp_1} = \frac{dx_2 + p_2 dz}{dp_2} = \frac{dx_3 + p_3 dz}{dp_3}$$

sont des conséquences de l'un des systèmes caractéristiques . Passons en revue les diverses formes d'équations de Monge-Ampère, en reprenant les notations des n° 90 à 95.

a) Première forme :

Une équation de la 1ère forme ne peut être du type étudié que si elle possède un seul système caractéristique , qui soit de la forme :

$$dz = \sum_{i=1}^{3} p_i dx_i$$

$$(S) \quad \begin{aligned} dp_1 &= \lambda[(1 + p_1^2)dx_1 + p_1p_2\, dx_2 + p_1p_3\, dx_3] \\ dp_2 &= \lambda[p_1p_2dx_1 + (1 + p_2^2)dx_2 + p_2p_3\, dx_3] \\ dp_3 &= \lambda[p_1p_3\, dx_1 + p_2p_3\, dx_2 + (1 + p_3^2)\, dx_3] \end{aligned}$$

λ étant une fonction quelconque des x_i, z, p_i,
L'équation de Monge-Ampère correspondante est la suivante :

$$p^{123}_{123} - \lambda \left\{ \begin{array}{l} (1+p_1^2)\, p^{23}_{23} + (1+p_2^2)\, p^{31}_{31} + (1 + p_3^2)\, p^{12}_{12} \\ + 2\, p_2p_3\, p^{12}_{31} + 2\, p_3p_1\, p^{23}_{12} + 2\, p_1p_2\, p^{31}_{23} \end{array} \right\}$$

$$+ \lambda^2 \left\{ \begin{array}{l} (1+p_2^2 + p_3^2)\, p_{11} + (1 + p_3^2 + p_1^2)\, p_{22} + (1 + p_1^2 + p_2^2)\, p_{33} \\ - 2\, p_1\, p_2 p_{12} - 2\, p_2p_3\, p_{23} - 2\, p_3\, p_1\, p_{31} \end{array} \right\}$$

$$- \lambda^3 (1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 0.$$

b) Deuxième, troisième, quatrième formes .

Aucune équation de M.A. de l'une quelconque de ces formes, ne peut appartenir au type considéré.

c) cinquième forme, première espèce.

La condition pour qu'une équation de M.A. de la cinquième forme, 1ère espèce, appartienne au type étudié est qu'elle admette un système caractéristique de la forme :

$$dx_2 + \lambda\, dx_1 = 0$$

$$p_1p_3\, dx_3 + (1 + p_1^2)\, dx_1 - \lambda\, p_1\, p_2\, dx_1 = 0$$

$$dp_1 = 0$$

$$dz = \sum_i p_i\, dx_i \quad ,$$

où λ est une fonction quelconque des x_i, z, p_i.

Les courbes caractéristiques correspondantes sont lignes de courbure sur toute surface intégrale. L'autre famille de caractéristiques, distincte de celle -ci, n'est pas composée de lignes de courbure.

L'équation de M.A. correspondante est la suivante :

$$p_1 p_3 (p_{11} - \lambda p_{12}) - (1 + p_1^2 - \lambda p_1 p_2) p_{13} = 0.$$

Remarque / On aurait évidemment des résultats analogues en considérant les seconde et troisième espèces.

d) Sixième forme , première espèce.

L'équation de la sixième forme, première espèce, qui est du type considéré est celle admettant le système caractéristique suivant :

$$dx_1 = 0$$

$$p_3 dx_3 + p_2 dx_2 = 0$$

$$dp_1 = 0$$

$$dz = 0$$

Les caractéristiques correspondantes sont lignes de courbure , mais non celles de l'autre famille (distincte). L'éuqation de Monge-Ampère correspondante est la suivante :

$$p_2 p_{21} - p_2 p_{31} = 0 ;$$

C'est l'une des formes canoniques pour le cas de 3 variables. Elle a été intégrée par M. Goursat (Mémoire 1899, page 27) . Sa solution générale est donnée par :

$$z = F[x_1 , \varphi (x_2, x_3)] ,$$

F et φ étant deux fonctions arbitraires de 2 arguments.
Remarque : on aurait des résultats analogues en considérant la seconde et la troisième espèce.

131 - CAS D'INTEGRABILITE COMPLETE PAR LA METHODE DE MONGE

Théorème : Soit une équation de Monge-Ampère du 3ème degré par rapport aux dérivées du second ordre, telle que, sur toute cloison intégrale, les caractéristiques soient lignes de courbure.

Si cette équation est complètement intégrable par la méthode de Monge chaque cloison intégrale est une enveloppe d'une famille doublement infinie d'hypersphères, extraite d'une famille à 4 paramètres.

Nous savons déjà que le système caractéristique est nécessairement unique, et de la forme (S) indiquée au numéro précédent. L'équation sera complètement intégrable par la méthode de Monge si et seulement si le système caractéristique est lui-même complètement intégrable.

Reprenons les notations du n° 130

Le système d'équation aux dérivées partielles vérifié par les intégrales premières du système (S) est le suivant :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial V}{\partial z} + \lambda \left[(1+p_1^2)\frac{\partial V}{\partial p_1} + p_1 p_2 \frac{\partial V}{\partial p_2} + p_1 p_3 \frac{\partial V}{\partial p_3}\right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial V}{\partial z} + \lambda \left[p_1 p_2 \frac{\partial V}{\partial p_1} + (1+p_2^2) \frac{\partial V}{\partial p_2} + p_2 p_3 \frac{\partial V}{\partial p_3}\right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial V}{\partial z} + \lambda \left[p_1 p_3 \frac{\partial V}{\partial p_1} + p_2 p_3 \frac{\partial V}{\partial p_2} + (1 + p_3^2) \frac{\partial V}{\partial p_3}\right] = 0$$

Pour que ce système soit en involution, il faut et il suffit que λ vérifie le système d'équation aux dérivées partielles suivant :

$$(1)\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial z} = -\lambda\left[(1+p_1^2)\dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} + p_1 p_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} + p_1 p_3 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_3}\right] + p_1 \lambda^2 \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial z} = -\lambda\left[p_1 p_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} + (1+p_2^2)\dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} + p_2 p_3 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_3}\right] + p_2 \lambda^2 \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_3} + p_3 \dfrac{\partial \lambda}{\partial z} = -\lambda\left[p_1 p_3 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} + p_2 p_3 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} + (1+p_3^2) \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_3}\right] + p_3 \lambda^2 \end{cases}$$

Supposons ces relations vérifiées .

Il s'agit de trouver une famille d'hypersphères à 4 paramètres telle que l'équation de M.A. correspondante, formée comme on l'a vu au numréo 125 , admette pour système caractéristique précisément le système S du n° 130.

Nous prendrons cette famille d'hypersphères sous la forme :

$$(\Omega) \qquad 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 z) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + z^2 + \mu(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

μ étant une fonction de a_1, a_2, a_3, a_4 à déterminer.

Soit Σ le système caractéristique de l'équation de M.A. correspondant à la famille (Ω).

Pour le former, désignons par φ_l $(l = 1,2,3,4)$ les fonctions des x_i, z, p_i définies par le système implicite :

$$(2)\begin{cases} \varphi_i + p_i \varphi_4 = x_i + p_i z \qquad (i = 1,2,3) \\[2ex] 2\left(\varphi_4 z + \sum\limits_{i=1}^{3} \varphi_i x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 + z^2 + \mu(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \end{cases}$$

Des relations (2) on tire :

$$(3)\begin{cases} d\varphi_i + p_i\, d\varphi_4 + \varphi_4\, dp_i = dx_i + p_i dz + z dp_i \qquad (i = 1,2,3) \\[2ex] \varphi_4 dz + z d\varphi_4 + \sum\limits_i (\varphi_i dx_i + x_i d\varphi_i) = z\, dz + \sum\limits_i x_i dx_i + \dfrac{1}{2}\, d\mu \end{cases}.$$

Le système caractéristique Σ n'est autre que :

$$d\varphi_l = 0 \qquad (l = 1, \ldots, 4)$$

ce qui d'après (3) équivaut à :

$$(4)\quad \begin{cases} (\varphi_4 - z)\, dp_i = dx_i + p_i\, dz & (i = 1,\dots,3) \\ \varphi_4 dz + \sum_i \varphi_i\, dx_i = z\, dz + \sum_i x_i\, dx_i \end{cases}$$

Cela étant, donnons-nous au départ une fonction $\lambda(x_i, z, p_i)$ vérifiant les relations (1), et cherchons à identifier le système (4) avec le système S du n° 130 correspondant à λ ainsi choisi .
On devra prendre :

$$\varphi_4 = z + \frac{1}{\lambda} ,$$

puis d'après (2)

$$\varphi_i = x_i - \frac{p_i}{\lambda} \qquad (i = 1,2,3)$$

Il reste à voir si, pour ce choix des φ_1, on peut trouver une fonction μ telle que la dernière équation (2) soit satisfaite, et, en outre, si la dernière équation du système (4) est bien équivalente à

$$dz - \sum_i p_i\, dx_i = 0$$

Voyons d'abord ce dernier point.
La dernière équation (4) peut s'écrire :

$$(\varphi_4 - z)\, dz = \sum_i (x_i - \varphi_i)\, dx_i$$

Or on a identiquement : $x_i - \varphi_i \equiv p_i\,(\varphi_4 - z)$

de sorte que cette dernière équation est bien équivalente à :
$dz - \sum_i p_i dx_i = 0$. L'identification de (4) avec (S) est donc complète.

La question qui reste à examiner se ramène au fond à ceci :

La fonction des x_i, z, p_i :

$$2\Psi \equiv 2\sum_i x_i\left(x_i - \frac{p_i}{\lambda}\right) + 2\left(z + \frac{1}{\lambda}\right)z - z^2 - \sum_i x_i^2$$ c'est-à-dire

$$2\Psi \equiv z^2 + \sum_i x_i^2 + \frac{2}{\lambda}\left(z - \sum_i p_i\, x_i\right)$$

peut - elle s'exprimer au moyen de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ seulement ?

Pour s'en assurer il suffit de vérifier que le tableau formé par les dérivées partielles de Ψ, $\varphi_1,\dots,\varphi_4$ relativement à $x_1,\dots,x_3$, $p_1,\dots,p_3, z$ est de rang 4 .

Nous le démontrerons en supposant que la jacobien

$$\frac{D(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4)}{D(x_1\ x_2\ x_3\ z)}$$

n'est pas nul.

Posons : $$\lambda^4 \cdot \frac{D(\psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{D(x_1, x_2, x_3, z, p_i)} \equiv \omega_i \qquad (i = 1,2,3)$$

On trouve :

$$\omega_1 \equiv (1+p_1^2 + p_2^2+p_3^2)\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial p_1} + (1+p_2^2+p_3^2)\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} - p_1p_2\frac{\partial\lambda}{\partial x_2} - p_1p_3\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}$$
$$+ p_1 \frac{\partial\lambda}{\partial z} - \lambda^2 p_1$$

$$\omega_2 \equiv (1+p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial p_2} + (1+p_3^2+p_1^2)\frac{\partial\lambda}{\partial x_2} - p_2p_3\frac{\partial\lambda}{\partial x_3} - p_2p_1\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}$$
$$+p_2 \frac{\partial\lambda}{\partial z} - \lambda^2 p_2$$

$$\omega_3 \equiv (1+p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial p_3} + (1+p_1^2 + p_2^2)\frac{\partial\lambda}{\partial x_3} - p_3p_1\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} - p_3p_2\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}$$
$$+ p_3 \frac{\partial\lambda}{\partial z} - \lambda^2 p_3$$

Il est facile de vérifier que le système des équations $\omega_i = 0$ $(i = 1,2,3)$ est algébriquement équivalent au système (1), identiquemen vérifie par hypothèse. Donc les fonctions ψ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, sont bien liées par une relation indépendante des x_i, z, p_i.

Par conséquent, on peut trouver la fonction μ cherchée.
Le théorème est donc démontré.

PARAGRAPHE QUATRE : COURBURE MOYENNE, COURBURE TOTALE

Les surfaces minima et les surfaces à courbure totale constante étant définies, dans l'espace ordinaire, par des équations de Monge-Ampère, il est naturel de voir s'il en est de même des cloisons analogues dans l'espace R^4. Il n'en est rien. En effet :

132 - CLOISONS MINIMA

L'équation aux dérivées partielles des cloisons minima est :

$$(1 + p_2^2 + p_3^2)\, p_{11} + (1 + p_3^2 + p_1^2)\, p_{22} + (1 + p_1^2 + p_2^2)\, p_{33}$$
$$- 2\, p_2\, p_3\, p_{23} - 2\, p_3\, p_1\, p_{31} - 2\, p_1\, p_2\, p_{12} = 0 \quad .$$

Equation du type (L) , de la cinquième forme.

Il suffit de se reporter au n° 94 pour vérifier qu'elle n'est pas du type de Monge-Ampère.

133 - CLOISONS A COURBURE TOTALE CONSTANTE

Une telle variété est définie par une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = K\Omega^3 \begin{vmatrix} 1+p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_1 & 1+p_2^2 & p_2p_3 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & 1+p_3^2 \end{vmatrix}$$

avec : $\Omega^2 = 1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, K désignant une constante.

C'est une équation (L) de la première forme.

On vérifie qu'elle ne peut être du type de Monge-Ampère que si K est nul. (cf. n° 90).

Elle s'intègre alors sans difficulté . La solution générale est évidemment l'enveloppe d'une famille doublement infinie quelconque d'hyperplans.

-=-=-=-=-=-=-=-=-

BIBLIOGRAPHIE

E. CARTAN - "Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques". Paris 1945.

A[1] : Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff. Annales Ecole Normale Supérieure , 3ème série , tome 16 (1899) pp. 239-332.

B - Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du 2nd ordre, à une fonction inconnue de 3 variables indépendantes. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1911, p. 352.

G. CERF - "Transformations de contact et problème de Pfaff". Mémorial des Sciences mathématiques , fascicule 37 (1929).

E.GOURSAT - "Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 1er ordre" 2ème édition , 1921. Hermann.

"Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre " Tome I, 1896.

" Leçons sur le problème de Pfaff " Paris 1922.

A - Sur les équations du 2nd ordre à n variables analogues à l'équation de Monge-Ampère.
Bulletin de la Société mathématique de France , tome 27, (1899) pages 1-34.

B - Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales et sur une généralisation du problème de Pfaff. Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse, 3ème série, tome VII (1915) pages 1-58.

J. HADAMARD - "Leçons sur la propagation des ondes " (Paris, Hermann 1903, n° 289, p. 273.)

M. JANET - "Les modules de formes algébriques et la théorie générale des systèmes différentiels" Annales de l'Ecole Normale supérieure, 3ème série, tome 41 (1924) pages 27-65.

E. KAHLER - "Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen " Edition 1949 . Chelsea New York.

G. KOWALEWSKI "Einführung in die Determinantentheorie " Edition 1948. Chelsea . New York.

T. LEPAGE - A" Sur une propriété caractéristique des équations des extrémales des intégrales multiples " Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sciences, 5ème série, tome XVI , (1930) , pages 103-123.

(1) Les mémoires sont distingués par des lettres majuscules , A,B,C,...

B]"Sur les équations de Monge-Ampère à 3 variables indépendantes"
Bull. de la Société Royale des Sciences de Liège , 2ème année,
n° 8,9,10 (1933) pp. 166-172.

C]"Sur certaines formes symboliques de degré et de rang n
à 2n+1 variables ". Acad. Roy. de Belgique, Bull. Cl. Sciences;
5ème série, tome XX (1934) pp. 527-537.

D]"Equation du second ordre et transformations symplectiques"
Premier colloque sur les équations aux dérivées partielles
Louvain 1953. (Masson, 1954) pp/ 79- 104.

E]"Sur une classe d'équations non linéaires du 2nd ordre"
Dans "La théorie des équations aux dérivées partielles"
(colloques internationaux du C.NR.S. Nancy, 9-15 avril 1956)
p.111.

A. LICHNEROWICZ "Algèbre et analyse linéaires" Masson, Paris (1947)
Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie"
Dunod, Paris (1955).

G. DE RHAM - "Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques"
Paris, Hermann, 1955.

W. SLEBODZINSKI "Formes extérieures et leurs applications "
Vol.I, Warszawa 1954.

VIVANTI - "Sull'estensione del metodo d'integrazione di Monge et
Ampère."
Rendiconti del Reale Instituto Lombardo di scienze e lettere ,
série II, vol. XXXII, p. 506.

-▯ - ▯ - ▯ - ▯ - ▯ -

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I - SYSTEMES D'EQUATIONS EXTERIEURES

1 - Caractères et genre d'un système 1

2 - Solutions.....21

3 - Recherche effective des caractères 31

4 - Ensembles de solutions dans E^n..... 40

CHAPITRE II - SYSTEMES DIFFERENTIELS EXTERIEURS EN INVOLUTION

1 - Généralités..... 42

2 - Systèmes fermés en involution..... 45

3 - Systèmes presque fermés en involution. 48

CHAPITRE III - SYSTEMES COMPLETEMENT INTEGRABLES

1 - Systèmes de Pfaff 61

2 - Systèmes de degré supérieur à 1 66

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE I - DEFINITION DES EQUATIONS DE MONGE-AMPERE
SYSTEMES CARACTERISTIQUES

1 - Equations (L) 76

2 - Equations de Monge-Ampère 81

3 - Intégrales (premières des systèmes caractéristiques 93

4 - Cas particulier : n = 3 96

CHAPITRE II - FORMES CANONIQUES

1 - Systèmes caractéristiques confondus 105

2 - Systèmes caractéristiques distincts 111

CHAPITRE III - METHODE D'INTEGRATION DE MONGE-JACOBI

1 - Intégrales de Lie 121

2 - Systèmes caractéristiques confondus 133

3 - Systèmes caractéristiques distincts (cas général) 140

4 - Sur une classe particulière d'équations de Monge-Ampère 144

CHAPITRE IV - APPLICATIONS, DANS L'ESPACE A QUATRE DIMENSIONS

1 - Familles à 4 paramètres de courbes ou de cloisons 153

2 - Caractéristiques, lignes asymptotiques 161

3 - Caractéristiques, lignes de courbure 166

4 - Courbure moyenne, courbure totale 171

- ▯ - ▯ - ▯ - ▯ - ▯ - ▯ -

DEUXIÈME THÈSE :

Propositions données par la Faculté

UNIFICATION DES PROBLÈMES DIRICHLET ET NEUMANN POUR UN DOMAINE BORNÉ D'UN R^3

Vu et approuvé :

Paris, le 31 Mai 1961

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PERES

VU

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH